

DƏQİQ ELMLƏR

EXACT SCIENCES

DOI: <https://doi.org/10.36719/2663-4619/88/119-125>**Zəfər Abbasov**Gəncə Dövlət Universiteti
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru
dumanlı.zefer@mail.ru**SABİT ƏMSALLI YÜKSƏKTƏRTİBLİ SİMMETRİK
VƏ QAYITMA DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR****Xülasə**

Məlum olduğu kimi, mexanikanın və texnikanın əksər məsələlərinin həlli yüksəktərtibli diferensial tənliklərin həllinə gətirilir. Belə tənliklərdən ən geniş tətbiq olunanı xətti diferensial tənliklərdir.

Yüksəktərtibli xətti diferensial tənliklər də öz növbəsində əmsalları dəyişən funksiyalar və sabit ədədlər olmaqla iki yerə bölünür.

Dəyişən əmsallı və sabit əmsallı n -tərtibli diferensial tənliklərin də ən sadəsi sağ tərəfsiz (bircinsli) xətti tənliklərdir.

Əmsalları hər hansı parçada və ya seqmentdə kəsilməz xətti bircinsli diferensial tənliyin ümumi həlli onun xətti asılı olmayan n sayda xüsusi həlləri vasitəsilə müəyyən olunur. Lakin belə fundamental həllər sisteminin tapılması üçün ümumi şəkildə verilmiş bir metod yoxdur.

Sabit əmsallı yüksəktərtibli xətti bircinsli diferensial tənliklərdə belə bir aparat vardır. Yəni sabit əmsallı xətti bircinsli diferensial tənliklərin fundamental həllər sisteminin qurulması üçün xarakteristik tənlik adlanan, cəbri tənliklər mövcuddur.

Açar sözlər: əmsal, sabit, simmetrik, qayıtma, diferensial, tənlik, bircinsli, parça, xüsusi həll, fundamental, metod, cəbri, yüksəktərtibli, funksiya

Zəfər AbbasovGanja State University
Ph.D in Mathematics
dumanlı.zefer@mail.ru**Reflexiv and symmetric differential equations with constant coefficients****Abstract**

It is environ that many of problems of Mathematics and Mechanics lead to differential equations of constant or variable coefficients. Most of such equations are linear equations.

Differential equations of high or n -order with variable or constant coefficients are linear equations without right sides of homogenous.

In the considered work they are investigated just equations with constant coefficients which lead to symmetric, squesiymetric or reflexiv equations.

As it is kneron from the classic such equations can be solved by considering corresponding algebraic equation.

The equations whose algebraic equations is simmetric or reflexiv are solve by usual Rnoron ways. With respect to the solutions of characteristic equations, the general solution of differential equation is constructed.

In his work one conseqers such a linear homgenious equations that they are lead to symmetric or reflexive equations. In the differential equation of high order the order of function to be found is

considered as a degree of corresponding algebraic equation and the roots of this equation defines the solutions of the differential equation.

Keywords: *efficient, constant, symmetric, differential equation, homogenous, segment fundamental*

Giriş

Beləliklə, yüksəktərtibli diferensial tənlikdə axtarılan funksiyanın tərtibini ona uyğun cəbri tənliyin qüvvəti kimi nəzərə alaraq, qurulmuş tənlik həll edilir və alınmış köklərdən asılı diferensial tənliyin ümumi həlli müəyyən olunur (Matveyev, 1974: 202; Abbasov, 2022: 14; Abbasov, 2022: 144). Bu haqda adi diferensial tənliklərə aid bütün mənbələrdə məlumat verilmişdir (Əhmədov, Həsənov, Yaqubov, 2015: 65; Stepanov, 2005: 126; Quliyev, Kazımov, 2001: 168; Abbasov, 2018: 212).

İndi baxacağımız sabit əmsallı yüksəktərtibli elə xətti bircinsli diferensial tənliklərdir ki, belə tənliklərin cəbri tənliyi simmetrik və ya qayıtma tənliklərə gətirilir (Abbasov, 2019: 18; Smirnov, 1981: 124; Elsgols, 1969: 180; Tikhonov, Vasilyev, Sveshnikov, 2012: 202; Petrovskiy, 1998: 48; Arnold, 2012: 58).

Tərif 1. Əmsalları sıfırdan fərqli, başlanğıcından və sonundan bərabər uzunluqda duran hədlərinin əmsalları eyni olan diferensial tənliyə sabit əmsallı yüksəktərtibli simmetrik tənlik deyilir.

Bu tənlik ümumi şəkildə aşağıdakı kimidir.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_k y^{(n-k)} + \dots + a_k y^{(k)} + \dots + a_1 y' + a_0 = 0, \quad (1)$$

burada $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ əmsalları sıfırdan fərqlidir.

(1) tənliyinin cəbri tənliyi uyğun olaraq

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_k \lambda^{n-k} + \dots + a_k \lambda^k + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (2)$$

simmetrik formada olur.

(2) şəklində simmetrik cəbri tənliyin aşağıdakı xassələri vardır.

Xassə 1. Simmetrik tənliyin sıfır bərabər kökü yoxdur.

Xassə 2. Simmetrik tənliyin $m \in R$ bərabər kökü olarsa, $\frac{1}{m} \in R$ bərabər kökü də var.

Xassə 3. Simmetrik tənliyin qüvvəti tək olarsa, onun köklərindən biri 1-ə bərabərdir.

Xassə 4. Qüvvəti cüt olan simmetrik tənliyin həlli üçün $p = \lambda + \frac{1}{\lambda}$ əvəzləməsini qəbul etmək əlverişlidir.

İndi aşağıdakı şəkildə verilmiş xüsusi halları nəzərdən keçirək.

1. $n = 3$ olduqda (1) tənliyi uyğun olaraq

$$ay''' + by'' + by' + a = 0, \quad (4)$$

şəklində, cəbri tənliyi isə

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + b\lambda + a = 0$$

şəklində olur. Bu tənliyi həll etmək üçün qruplaşdıraraq:

$$(a\lambda^3 + a) + (b\lambda^2 + b\lambda) = 0 \Rightarrow a(\lambda^3 + 1) + b\lambda(\lambda + 1) \Rightarrow 0 \Rightarrow a(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) + b\lambda(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(a\lambda^2 + (b - a)\lambda + a) = 0 \Rightarrow \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$$

$a\lambda^2 + (b - a)\lambda + a = 0$ kvadrat tənlikdir. Diskriminantın işarəsindən asılı olaraq λ_2 və λ_3 köklərini müəyyən edirik.

Qeyd. λ_2 və λ_3 köklərinin həqiqi və ya kompleks olmasına görə (4) tənliyinin ümumi həllini alırıq.

Əgər $\lambda_2 \in R$ və $\lambda_3 \in R$ isə (4) tənliyinin ümumi həlli

$$y(x) = A_1 \cdot e^{-x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + A_3 e^{\lambda_3 x}$$

Əgər $\lambda_2 \in C$ və $\lambda_3 = \overline{\lambda_2} \in C$ isə (4) tənliyinin ümumi həlli

$$y(x) = A_1 e^{-x} + A_2 \sin \lambda x + A_3 \cos \lambda x, \text{ burada } \lambda_2 = i\lambda, \lambda_3 = \overline{\lambda_2} = -i\lambda$$

Nümunə 1. $4y''' - 9y'' - 9y' + 4 = 0$ tənliyin cəbri tənliyi $4\lambda^3 - 9\lambda^2 - 9\lambda + 4 = 0$ şəklindədir. Qruplaşdırma aparsaq.

$$(4\lambda^3 + 4) - (9\lambda^2 + 9\lambda) = 0 \Rightarrow 4(\lambda^3 + 1) - 9\lambda(\lambda + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) - 9\lambda(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)(4\lambda^2 - 13\lambda + 4) = 0 \Rightarrow \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,$$

$$4\lambda^2 - 13\lambda + 4 = 0 \Rightarrow D = 13^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 169 - 64 = 105,$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{13 \pm \sqrt{105}}{8}; \quad \lambda_2 = \frac{13 + \sqrt{105}}{8}, \quad \lambda_3 = \frac{13 - \sqrt{105}}{8}$$

Deməli tənliyin hər üç kökü həqiqi olduğundan, uyğun diferensial tənliyin ümumi həlli aşağıdakı şəkildə olar.

$$y(x) = A_1 e^{-x} + A_2 e^{(13 + \sqrt{105})/8 \cdot x} + A_3 e^{(13 - \sqrt{105})/8 \cdot x}$$

2. $n = 4$ olduqda (1) tənliyi

$$ay^{(IV)} + by''' + cy'' + by' + a = 0, \quad (5)$$

dördtərtibli sabit əmsallı simmetrik bircinsli xətti diferensial tənlik, cəbri tənliyi isə

$$a\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 + b\lambda + a = 0,$$

dörd dərəcəli çoxhədli tənlik olur. Əgər bu tənliyi $\lambda^2 \neq 0$ bölsək:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c + b\frac{1}{\lambda} + a\frac{1}{\lambda^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(a\lambda^2 + \frac{a}{\lambda^2}\right) + \left(b\lambda + \frac{b}{\lambda}\right) + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right) + b\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + c = 0, \quad \lambda + \frac{1}{\lambda} = p$$

əvəzləməsi aparsaq, $a(p^2 - 2) + bp + c = 0$ kvadrat tənliyini alırıq.

$ap^2 + bp + (c - 2a) = 0$, aydındır ki, buradan $\lambda + \frac{1}{\lambda} = p_1$ və $\lambda + \frac{1}{\lambda} = p_2$ olmaqla iki kvadrat tənlik alırıq.

Məlumdur ki, bu tənliklərdən λ -nın dörd həqiqi, həqiqi və kompleks və ya kompleks qoşma kökləri olacaqdır.

Qeyd 2. Əgər köklərdən hamısı həqiqi və müxtəlif olarsa, $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4 \in R$, onda (5) tənliyinin ümumi həlli

$$y(x) = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + A_3 e^{\lambda_3 x} + A_4 e^{\lambda_4 x}$$

şəklində olar.

Nümunə 2. $y^{(IV)} - 3y''' + y'' - 3y' + 1 = 0$, tənliyinin cəbri tənliyi $\lambda^4 - 3\lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ olur. Buradan $\lambda^2 \neq 0$ bölməklə,

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 - \frac{3}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} \right) - 3 \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) + 1 = 0,$$

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = p \quad \text{olduqda} \quad (p^2 - 2) - 3 \cdot p + 1 = 0 \Leftrightarrow p^2 - 3p - 1 = 0; \quad p_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

$\lambda + \frac{1}{\lambda} = p_1$ və $\lambda + \frac{1}{\lambda} = p_2$ yazmaqla cəbri tənliyin dörd kökünü alırıq.

Deməli, $\lambda + \frac{1}{\lambda} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$, $\lambda + \frac{1}{\lambda} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$ tənliklərinin iki həqiqi və kompleks qoşma kökləri olduğundan verilmiş diferensial tənliyin ümumi həlli

$$y(x) = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + A_3 \cos \lambda_3 x + A_4 \sin \lambda_3 x \quad [\lambda_3 = \bar{\lambda}_4].$$

3. $n = 5$ olduqda (1) tənliyi beş tərtibli

$$ay^{(V)} + by^{(IV)} + cy''' + cy'' + by' + a = 0, \quad (6)$$

diferensial tənliyə çevrilir. Bu tənliyin cəbri tənliyi uyğun olaraq

$$a\lambda^5 + b\lambda^4 + c\lambda^3 + c\lambda^2 + b\lambda + a = 0 \quad (7)$$

şəklindədir. Məlumdur ki, tənlik tək dərəcəli olduğundan onun köklərindən biri $\lambda_1 = -1$ bərabərdir. Ona görə (7) tənliyi $(\lambda + 1)$ ifadəsinə bölüb, dörd dərəcəli tənliyə çeviririk. Bu tənlik haqqında 2.-də məlumat verilmişdir.

4. $n = 6$ olduqda (1) tənliyi altı tərtibli simmetrik əmsallı

$$ay^{(6)} + by^{(5)} + cy^{(4)} + dy^{(3)} + cy'' + by' + a = 0, \quad (8)$$

tənliyinə çevrilir. Bu tənliyin cəbri tənliyi

$$a\lambda^6 + b\lambda^5 + c\lambda^4 + d\lambda^3 + c\lambda^2 + b\lambda + a = 0, \quad (9)$$

şəklində olur.

(9) tənliyini həll etmək üçün onun $\lambda^3 \neq 0$ bölərək,

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d + \frac{c}{\lambda} + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{a}{\lambda^3} = 0, \quad (10)$$

tənliyinə gəlirik. Əmsallara görə qruplaşdırma aparsaq,

$$a\left(\lambda^3 + \frac{1}{\lambda^3}\right) + b\left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right) + c\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + d = 0$$

Analoji olaraq bu tənliyin həllini $\lambda + \frac{1}{\lambda} = p$ əvəzləməsinin köməyi ilə aşağıdakı formaya salmaq olur.

$$a(p^3 - 3p) + b(p^2 - 2) + cp + d = 0,$$

Onda (10) tənliyi

$$ap^3 + bp^2 - (3a - c)p + (d - 2b) = 0, \quad (10)$$

bu tənliyin həlli üçdərəcəli tənliyin həllinə müvafiq olaraq məlum olduğundan,

p_1, p_2, p_3 -ü tapıb, əvəzləmədə nəzərə alsaq, aşağıdakı üç tənliyi alırıq.

$\lambda + \frac{1}{\lambda} = p_1, \lambda + \frac{1}{\lambda} = p_2$ və $\lambda + \frac{1}{\lambda} = p_3$ əvəzləmələrə uyğun olaraq (9) tənliyinin altı kökünü alırıq.

Qeyd 3. Əgər $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_3 \neq \lambda_4, \lambda_5 \neq \lambda_6$ olub, hamısı həqiqi olarsa (8) tənliyinin ümumi həlli

$$y(x) = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + A_3 e^{\lambda_3 x} + A_4 e^{\lambda_4 x} + A_5 e^{\lambda_5 x} + A_6 e^{\lambda_6 x}$$

Qeyd 4. Əgər $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2, \lambda_3 = \bar{\lambda}_4, \lambda_5 = \bar{\lambda}_6$ kompleks qoşma ədədlərdirsə onda (8)-tənliyinin ümumi həlli

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda, \lambda_3 = \bar{\lambda}_4 = \sigma, \lambda_5 = \bar{\lambda}_6 = \mu \quad [\lambda, \sigma, \mu \in C]$$

$$y(x) = A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x + A_3 \sin \sigma x + A_4 \cos \sigma x + A_5 \sin \mu x + A_6 \cos \mu x$$

burada $\lambda_{1,2} = \pm i\lambda, \lambda_{3,4} = \pm i\sigma, \lambda_{5,6} = \pm i\mu$

Tərif 2. Əmsalları sıfırdan fərqli, kənarlarından eyni uzaqlıqda duran cüt tərtibli hədlərinin əmsalları bərabər, tək tərtibli hədlərinin əmsalları isə modulca bərabər, işarəcə əks olan diferensial tənliklərə çəpsimmetrik tənliklər deyilir.

$$ay^{(4)} + by^{(3)} + cy'' - by' + a = 0, \quad (11)$$

şəklində, cəbri tənliyi isə

$$a\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 - b\lambda + a = 0, \quad (12)$$

kimidir. Bu tənliyin hər tərəfini $\lambda^2 \neq 0$ bölərək,

$$a\left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right) + b\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) + c = 0, \quad (13)$$

tənliyi alırıq, $\lambda - \frac{1}{\lambda} = p$ əvəzləməsini qəbul etsək, $\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} = p^2 + 2$ olar. Onda (13) tənliyi $a p^2 + bp + (c + 2a) = 0$ şəklinə gəlir.

$$\lambda - \frac{1}{\lambda} = p_1 \text{ və } \lambda - \frac{1}{\lambda} = p_2$$

olduğunu bilərək, (12) tənliyinin dörd kökünü alırıq.

Qeyd 5. Əgər köklərin hamısı həqiqi müxtəlifdirsə, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in R$ onda (11) tənliyinin ümumi həlli aşağıdakı şəkildə olur.

$$y(x) = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + A_3 e^{\lambda_3 x} + A_4 e^{\lambda_4 x}$$

Qeyd 6. Əgər kökləri kompleks qoşmadırsa, ümumi həll

$$y(x) = A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x + A_3 \sin \sigma x + A_4 \cos \sigma x$$

şəklində yazılır, burada

$$\lambda_{1,2} = \pm i\lambda, \lambda_{3,4} = \pm i\sigma$$

Tərif 3. $a_0 \neq 0, a_0 y^{(2n+1)} + a_1 y^{(2n)} + \dots + a_n y^{(n-1)} +$

$$+ a_{n+1} y^{(n)} + \dots + a_{2n} y' + a_{2n+1} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{a_{2n+1}}{a_0} = k^{2n+1}, \frac{a_{2n}}{a_1} = k^{2n-1}, \dots, \frac{a_{n+1}}{a_n} = k, \quad (15)$$

$k \in R$ şərti ödənərsə, belə tənliyə tək tərtibli qayıtma diferensial tənlik deyilir.

Tərif 4. $a_0 \neq 0, a_0 y^{(2n)} + a_1 y^{(2n-1)} + \dots + a_{n-1} y^{(n+1)} +$

$$+ a_n y^{(n)} + a_{n+1} y^{(n-1)} + \dots + a_{2n+1} y' + a_{2n} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{a_{2n}}{a_0} = k^n, \frac{a_{2n-1}}{a_1} = k^{n-1}, \dots, \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} = k, \quad k \in R, \quad (17)$$

(17) şərti daxilində verilmiş tənlik cüt tərtibli qayıtma diferensial tənlik adlanır. (14) və (16) tənliklərinin uyğun cəbri tənlikləri

$$a_0 \lambda^{2n+1} + a_1 \lambda^{2n} + \dots + a_n \lambda^{n+1} + a_{n+1} \lambda^n + \dots + a_{2n} \lambda + a_{2n+1} = 0, \quad (17_1)$$

$$a_0 \lambda^{2n} + a_1 \lambda^{2n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda^{n+1} + a_n \lambda^n + a_{n+1} \lambda^{n-1} + \dots + a_{2n-1} \lambda + a_{2n} = 0, \quad (18)$$

şəklində olur.

Qayıtma cəbri tənliklərin aşağıdakı xassələrini qeyd etmək olar.

Xassə 1. Qayıtma tənliklərin sıfıra bərabər kökü yoxdur.

Xassə 2. Dərəcəsi tək olan qayıtma tənliklərin köklərindən biri $-k$ -ya bərabərdir.

Xassə 3. Dərəcəsi cüt olan qayıtma tənliklərin həlli zamanı $\lambda + \frac{k}{\lambda} = p$ əvəzləməsini qəbul etmək əlverişlidir.

Xassə 4. Dərəcəsi tək olan qayıtma tənliklərin həlli zamanı, onun dərəcəsini bir vahid azaltmaq üçün onu $(\lambda + k)$ ifadəsinə bölmək lazımdır.

Xassə 5. Qüvvət üstlərinə görə cəbri tənliyi qruplaşdırıb, $\lambda + \frac{k}{\lambda} = p$ əvəzləməsini qəbul etmək lazımdır.

Xassə 6. Cəbri tənliklərdə $k \in R$ ədədini tapmaq üçün $\frac{a_{n+1}}{a_n} = k$ və $\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} = k$ münasibətlərindən istifadə etmək əlverişlidir.

Nəticə

Sabit əmsallı yüksəktərtibli diferensial tənliklərin həlli üçün əsas aparat bu tənliyə uyğun yazılmış xarakteristik (cəbri) tənliyin qurmaq və tənliyin köklərini müəyyən edərək, məlum teoremlərə əsasən verilmiş diferensial tənliyin ümumi həllini yazmaqdan ibarətdir. Baxılmış işdə əsasən sabit əmsallı yüksəktərtibli diferensial tənliklərin cəbri tənliyi simmetrik, çəpsimmetrik və qayıtma tənliklərə gələn diferensial tənliklərdir ki, belə cəbri tənliklərin həlli üçün müəyyən əvəzləmələr aparmaqla, eləcə də tənliyin tərtibini aşağı salmaqla onun köklərini tapmaq asanlaşmış olur.

Ədəbiyyat

1. Matveyev, N.M. (1974). Metody integrirvaniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy. Minsk, 298 s.
2. Abbasov, Z.D. (2022). Kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi. Gəncə: "Star" çap evi, 288 s.
3. Abbasov, Z.D. (2022). Birtərtibli xüsusi törəməli diferensial tənliklər. Bakı, s.28.
4. Əhmədov, Q.T., Həsənov, K.Q., Yaqubov, M.H. (2015). Adi diferensial tənliklər. Bakı, 420 s.
5. Stepanov, V.V. (2005). Kurs differentsial'nykh uravneniy. Moskva, 264 s.
6. Quliyev, X.M., Kazımov, K.Q. (2001). Diferensial tənliklərdən misallar. Bakı, 180 s.
7. Abbasov, Z.D. (2018). Riyazi fizika tənlikləri. Bakı: "Ləman" nəşriyyatı, 380 s.
8. Abbasov, Z.D. (2019). Yüksəktərtibli xüsusi törəməli diferensial tənlik üçün bir qarışıq məsələ. GDU-nun Elmi xəbərləri jurnalı, Gəncə, s.11-13.
9. Smirnov, V.I. (1981). Kurs vysshey matematiky. 2 tom, Nauka, 628 s.
10. Elsgols, L.E. (1969). Diferentsialnye uravneniye i variatsionnoye ischisleniye. Moskva, 280 s.
11. Tikhonov, A.N., Vasiliyev, A.B., Sveshnikov, A.G. (2012). Diferentsialnye uravneniye. Moskva, 326 s.
12. Petrovskiy, I.G. (1998). Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy. Moskva: Nauka, 360 s.
13. Arnold, V.I. (2012). Obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya. Moskva, 330 s.

Göndərildi: 10.11.2022

Qəbul edildi: 17.02.2023