RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA ELMLƏRİ

MATHEMATICS AND MECHANICAL SCIENCES

DOI: https://doi.org/10.36719/2789-6919/24/23-28

Zəfər Abbasov
Gəncə Dövlət Universiteti
Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru
dumanlı.zefer@mail.ru

N ÖLÇÜLÜ DALĞA TƏNLİYİ ÜÇÜN BİR QARIŞIQ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

Xülasə

Çoxölçülü ($n \geq 3$) dalğa proseslərinin praktiki əhəmiyyəti çətin görünsə də nəzəri və riyazi olaraq bu kimi məsələlərin həlli riyazi fizika tənlikləri kursunun nəzəri fizika və mexanikanın bir çox məsələlərinin öyrənilməsində böyük rol oynayır. Bu baxımdan klassik riyazi fizika məsələlərin çoxölçülü oblastlara analogiyası belə tip məsələlərin ümumiləşmiş həllinin qurulmasını gerçəkləşdirir. İstər riyazi fizika tənliklərində, istərsə də nəzəri fizikanın və mexanikanın üçölçülü oblastlarda baxılmış əksər məsələlərinin həlli bir qayda olaraq birölçülü və ikiölçülü məsələlərin klassikadan məlum olan həllinə uyğun aparılır. Lakin mahiyyət eyni olsa da qoyulmuş məsələlərin həlli zamanı birqiymətli həllin tapılmasında ikinci tərtib xüsusi törəməli diferensial tənliyə daxil olan axtarılan funksiyanın sərbəst dəyişənlərinin başlanğıc və sərhəd şərtlərini ödəməsi zərurəti yaranır. Bu baxımdan qoyulmuş məsələnin sərhəd şərtlərini ödəyən trivial olmayan həllinin qurulması zamanı məxsusi ədədlərin və məxsusi funksiyaların təyini böyük əhəmiyyətə mailk olur (Abbasov, 2018: 47, 52, 78, 80).

Açar sözlər: *tənlik, sərhəd, oblast, məhdud, başlanğıc şərti, Furye metodu, xüsusi həll, trivial olmayan*

Zafar Abbasov
Ganja State University
Ph.D in Mathematics
dumanli.zefer@mail.ru

A mixed boundary value problem for the n-dimensional wave equation

Abstract

Although the practical importance of multidimensional wave processes seems difficult, solving such problems theoretically and mathematically plays a big role in the study of many problems of physics and mechanics. From this point of view, the analogy of classical mathematical physics problems in multidimensional areas makes the construction of a generalized solution of such type of problems a reality. As a rule, the solution of most of the problems considered in the mathematical physics equations and the dimensional areas of theoretical physics and mechanics is carried out according to the solution of one-dimensional and two dimensional problems known from the classics (Abbasov, 2018: 47, 52, 78, 80).

Keywords: *equation, border, region, limited, beginning, Fourier method, special solution, non-trivial*

Giriş

Baxılan işdə n ölçülü dalğa hadisələrinin birqiymətli həllinin öyrənilməsi üçün bir qarışıq sərhəd məsələsinin həllinə baxılmışdır. Belə ki, bu cür riyazi fizika məsələləri üçölçülü oblastlar üçün araşdırılmışdır (Koşlyakov, 1996: 126; Abbasov, 2018: 172; Tixonov, Samarskiy, 2007: 150;

Şankov, 2017: 26; Trikomi, 2007: 240; Abbasov, 2019: 40). $n \geq 3$ olduqda işlər hiperbolik tipli, istərsə də parabolik tipli məsələlərin sərhəd şərtləri daxilində həllərini öyrənilməsi demək olar araşdırılmışdır (Koleşnikova, 2015: 42; Abbasov, 2019: 40; Abbasov, 2022: 6; Abbasov, 2023: 26). Məlumdur ki, çoxölçülü oblastlarda bu tipli məsələlərin həlli Furye metodunun tətbiqi ilə əlverişli olur.

Tənliyə daxil olan axtarılan $(n+1)$ dəyişənli funksiyanın Koşi şərti üçün özünün və zamana görə birinci tərtib $t=0$ anında qeyd olunması, funksiyanın $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dəyişənlərinin hər birinə nəzərən sərhəd şərtlərinin mümkünlüyü, n ölçülü dalğa prosesləri üçün bir qarışıq sərhəd məsələsinin həllini zəruri edir (Abbasov, 2018: 48).

Bu baxımdan n ölçülü dalğa proseslərini ifadə edən $u = u(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ funksiyasına meyl funksiyası deyəcəyik. Riyazi olaraq məsələnin qoyuluşu aşağıdakı kimidir.

Məsələnin qoyuluşu:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \tag{1}$$

burada $a^2 = \dfrac{T(x)}{\rho(x)}$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, $t > 0$, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$

Laplas operatoru,

$$\begin{aligned} &u(x,0) = u_0(x) \in C^2, \quad x \in R^n, \\ &u_t(x,0) = u_1(x) \in C^1, \quad x \in R^n, \end{aligned} \tag{2}$$

Koşi şərtlərini,

$$\begin{cases} u(0, x_2, ..., x_n, t) = u(\ell_1, x_2, ..., x_n, t) = 0, \\ u(x_1, 0, ..., x_n, t) = u(x_1, \ell_1, ..., x_n, t) = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ u(x_1, x_2, ..., 0, t) = u(x_1, x_2, ..., \ell_n, t) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

bircins sərhəd şərtlərini ödəyən

$$\overline{D} := \{(x,t) : 0 \leq x_i \leq \ell_i, \ t \geq 0\}, \quad i = \overline{1,n}$$

qapalı oblastda kəsilməz məhdud həllini tapmalı. Burada

$$D = \{(x,t) : 0 < x_i < \ell_i, t > 0\}, \quad i = \overline{1,n}, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$$

$$u_0(x) \in C^2(R^n), \quad u_1(x) \in C^1(R^n), \quad u(x,t) \in R^n(D),$$

$$u(x,t) \in C^{2,2}_{x,t}(D) \cap C(\overline{D})$$

Məsələnin həlli: Furye metodunun və ya dəyişənlərinə ayırma üslunun tətbiqi ilə axtarılan $u(x,t)$ funksiyasını uyğun olaraq

$$u(x,t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t) X(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad 4)$$

şəklində seçmək əlverişli olur (Abbasov, 2015).

(4) həllinə (1) tənliyinin xüsusi həlli də deyəcəyik. (4)-ü (1)-də nəzərə alsaq:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a^2}(-\omega^2)(A\cos\omega t + B\sin\omega t) X(x_1, x_2, ..., x_n) = \\ &= (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 X}{\partial x_n^2}\right) \Leftrightarrow -\frac{\omega^2}{a^2} X(x) = \Delta X, \end{aligned} \tag{5}$$

(5) tənliyi n ölçülü Helmohols tənliyi adlanır. $\dfrac{\omega^2}{a^2} = k^2$ olduğunu qəbul etsək, Helmohols tənliyi

$$\Delta X + k^2 X = 0 \qquad (5_1)$$

formasına düşər.

(5_1) tənliyinin dəyişənlərinə ayırma üsulunun köməyi ilə n sayda birdəyişənli funksiyanın hasili şəklində xüsusi həll olaraq seçsək:

$$X(x_1, x_2, ..., x_n) = X_1(x_1)\cdot X_2(x_2)\cdot ...\cdot X_n(x_n) = \prod_{i=1}^{n} X_i(x_i), \tag{6}$$

(6)-nı (5_1)-də yazsaq:

$$\begin{aligned} &X_1''(x_1)X_2(x_2)...X_n(x_n) + X_1(x_1)\cdot X_2''(x_2)...X_n(x_n) + ... + \\ &+ X_1(x_1)\cdot X_2(x_2)...X_n''(x_n) + k^2 X(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

(7) tənliyinin hər tərəfini $\prod_{i=1}^{n} X_i(x_i) \neq 0$ bölsək,

$$\frac{X_1''(x_1)}{X_1(x_1)} + \frac{X_2''(x_2)}{X_2(x_2)} + ... + \frac{X_n''(x_n)}{X_n(x_n)} = -k^2, \tag{8}$$

bərabərliyindən göründüyü kimi hər bir toplanana daxil olan nisbət öz arqumentinin funksiyasıdır. Onda buradan n sayda asılı olmayan nisbətlər alarıq. Yəni:

$$\frac{X_1''(x_1)}{X_1(x_1)} = -\frac{X_2''(x_2)}{X_2(x_1)} = -... = \frac{X_n''(x_n)}{X_n(x_n)} = -k^2, \tag{8_1}$$

$\frac{X_1''(x_1)}{X_1(x_1)} = -\lambda_{k_1}^2,\ \frac{X_2''(x_2)}{X_2(x_2)} = -\lambda_{k_2}^2, ..., \frac{X_n''(x_n)}{X_n(x_n)} = -\lambda_{k_n}^2$ olduğunu qəbul etsək, aşağıdakı şəkildə verilmiş n sayda ikitərtibli sabit əmsallı adi diferensial tənlikləri alarıq.

$$\left[\begin{array}{l} X_1''(x_1) + \lambda_{k_1}^2 X_1(x_1) = 0, \quad (\lambda_{k_1}^2 = k^2) \\ X_2''(x_2) + \lambda_{k_2}^2 X_2(x_2) = 0, \quad (\lambda_{k_2}^2 = k^2 - \lambda_{k_1}^2) \\ X_3''(x_3) + \lambda_{k_3}^2 X_3(x_3) = 0, \quad (\lambda_{k_3}^2 = k^2 - \lambda_{k_1}^2 - \lambda_{k_2}^2) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ X_n''(x_n) + \lambda_{k_n}^2 X_n(x_n) = 0, \quad (\lambda_{k_n}^2 = k^2 - \lambda_{k_1}^2 - ... - \lambda_{k_{n-1}}^2), \end{array}\right. \tag{9}$$

(9) tənliklərinin ümumi inteqral həllərini yazsaq:

$$\left[\begin{array}{l} X_1(x_1) = \alpha_1 \cos\lambda_{k_1} x_1 + \beta_1 \sin\lambda_{k_1} x_1 \\ X_2(x_2) = \alpha_2 \cos\lambda_{k_2} x_2 + \beta_2 \sin\lambda_{k_2} x_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ X_n(x_n) = \alpha_n \cos\lambda_{k_n} x_n + \beta_n \sin\lambda_{k_n} x_n \end{array}\right. \tag{10}$$

(3) bircins sərhəd şərtləri (4)-də nəzərə alsaq;

$$\left[\begin{array}{l} X_1(0) = X_1(\ell_1) = 0, \\ X_2(0) = X_2(\ell_2) = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ X_n(0) = X_n(\ell_n) = 0, \end{array}\right. \tag{11}$$

sərhəd sərtlərini ödəyən (10) həlləri üçün məxsusi qiymət və məxsusi funksiyaların qurulması haqqında məsələyə gələrik.

(11)-(10) $\Rightarrow X_1(0) = \alpha_1 = 0,\ X_1(\ell_1) = \beta_1 \sin\lambda_{k_1}\ell_1 = 0,$

$$\beta_1 \neq 0 \Rightarrow \lambda_{k_1} = \frac{\pi k_1}{\ell_1},\ k_1 \in Z$$

$$X_2(0)=\alpha_2=0,\ \ X_2(\ell_2)=\beta_2\sin\lambda_{k_2}\ell_2=0,\ \beta_2\neq 0\Rightarrow\lambda_{k_2}=\frac{\pi k_2}{\ell_2},\ \ k_2\in Z$$

....

$$X_n(0)=\alpha_n=0,\ \ X_n(\ell_n)=\beta_n\sin\lambda_{k_n}\ell_n=0,\ \beta_n\neq 0\Rightarrow\lambda_{k_n}=\frac{\pi k_n}{\ell_n},\ \ k_n\in Z$$

Deməli (10)-(11) sərhəd məsələsinin trivial olmayan həlli üçün məxsusi ədədlər

$\lambda_{k_1},\lambda_{k_2},...,\lambda_{k_n},\ \ (k_1,k_2,...,k_n)\in Z$

şəklində, bu ədədlərə uyğun məxsusi funksiyalar çoxluğu

$$X_1(x_1)=\beta_1\sin\frac{\pi k_1}{\ell_1}x,\ \ X_2(x_2)=\beta_2\sin\frac{\pi k_2}{\ell_2}x_2,...,X_n(x_n)=\beta_n\sin\frac{\pi k_n}{\ell_n}x_n$$

şəklində olar. Sadəlik üçün $\beta_1=1,\ \beta_2=1,...,\beta_n=1$ qəbul etsək, məxsusi qiymətləri və məxsusi funksiyaları ümumi formada yaza bilərik.

Nəticə 1: (10)-(11) sərhəd məsələsinin trivial olmayan həlli üçün məxsusi ədədlər

$$\lambda_{k_i}=\left\{\frac{\pi k_i}{\ell_i}\right\},\ \ i=\overline{1,n}$$

məxsusi funksiyalar çoxluğu isə

$$X_i(x_i)=\left\{\sin\frac{\pi k_i}{\ell_i}x_i\right\},\quad i=\overline{1,n}\ \text{şəklindədir.} \tag{9}$$

bərabərliklərində məxsusi $\lambda_i,\ \ i=\overline{1,n}$ ədədlərindən asılı təyin olunan k^2 ədədini ümumi şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$k^2_{k_1,k_2,...k_n}=\lambda^2_{k_1}+\lambda^2_{k_2}+...+\lambda^2_{k_n}=\sum_{i=1}^{n}\lambda^2_{k_i},$$

$$\omega^2_{k_1,k_2,...k_n}=a^2k^2_{k_1,k_2,...k_n}=a^2\sum_{i=1}^{n}\lambda^2_{k_i}=a^2\sum_{i=1}^{n}\pi^2\left(\frac{k_i}{\ell_i}\right)^2$$

Buradan (1) tənliyinin (4) xüsusi həllərinin uyğun şəkildə

$$u_{k_1,k_2,..k_n}(x,t)=(A\cos\omega t+B\sin\omega t)\prod_{i=1}^{n}X_i(x_i)=$$

$$=\left(A_{k_1,k_2,..k_n}\cos a\pi\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{k_i}{\ell_i}\right)^2\right)^{1/2}t+B_{k_1,k_2,..k_n}\sin a\pi\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{k_i}{\ell_i}\right)^2\right)^{1/2}t\right)\prod_{i=1}^{n}\sin\pi\left(\frac{k_i}{\ell_i}\right)x_i, \tag{12}$$

və ya daha sadə formada yazsaq:

$$u_{k_1,k_2,..k_n}(x,t)=(A_{k_1,k_2,...k_n}\cos\omega_{k_1,k_2,...k_n}t+B_{k_1,k_2,...k_n}\sin\omega_{k_1,k_2,...k_n}t)\prod_{i=1}^{n}\sin\pi\left(\frac{k_i}{\ell_i}\right)x_i, \tag{12$_1$}$$

(1) tənliyi xətti və bircinsli olduğundan onun xüsusi həllərinin düzəldilmiş

$$u(x,t)=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}u_{k_1,k_2,...k_n}(x,t) \tag{13}$$

sırası da onun həlli olur. Bu sıranın yığılmasından asılı olmayaraq onun hər bir həddi (1) tənliyinin (3) sərhəd şərtlərini ödəyən həllidir.

İndi (2) Koşi şərtlərindən istifadə edərək, (12) həllindən $A_{k_1,k_2,...k_n}$ və $B_{k_1,k_2,...k_n}$ əmsallarını tapa bilərik. (2)-ni (12)-də nəzərə alsaq,

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}A_{k_1,k_2,..k_n}\prod_{i=1}^{n}\sin\pi\left(\frac{k_i}{\ell_i}\right)x_i=u_0(x),\quad x=(x_1,x_2,...,x_n) \tag{14}$$

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}\omega_{k_1,k_2,\dots,k_n}B_{k_1,k_2,\dots,k_n}\prod_{i=1}^{n}\sin\pi\left(\frac{k_i}{\ell_i}\right)x_i=u_1(x),\quad x=(x_1,x_2,\dots,x_n) \qquad (15)$$

(14) və (15) münasibətlərindən göründüyü kimi başlanğıc şərtlərin ifadə olunduğu $u_0(x)$ və $u_1(x)$ funksiyası R^n fəzasında birinci və ikinci tərtibdən kəsilməz olması ilə yanaşı, əlavə olaraq t -nin qeyd olunmuş qiymətlərində $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ -in $[0,\ell_1],[0,\ell_2],\dots,[0,\ell_n]$ parçalarından götürülmüş hər bir sabit qiymətlərində məxsusi $X_i(x_i),\quad i=\overline{1,n}$ funksiyalarına nəzərən n qat Furye sırasına ayrıla bilən olmalıdır. Yəni:

$$u_0(x)=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}u_{0k_1,k_2,\dots,k_n}(x)\prod_{i=1}^{n}\sin\pi\left(\frac{k_i}{\ell_i}\right)x_i,$$

$$u_1(x)=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}u_{1k_1,k_2,\dots,k_n}(x)\prod_{i=1}^{n}\sin\pi\left(\frac{k_i}{\ell_i}\right)x_i, \qquad (15_1)$$

$$(15)\Rightarrow u_{0k_1,k_2,\dots k_n}=\frac{2^n}{\ell_1,\ell_2\dots\ell_n}\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}\dots\int_0^{\ell_n}u_0(x)\prod_{i=1}^{n}\sin\pi\left(\frac{k_i}{\ell_i}\right)x_i\,dx_i,$$

$$A_{k_1,k_2,\dots k_n}=\frac{2^n}{\ell_1,\ell_2\dots\ell_n}\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}\dots\int_0^{\ell_n}u_0(x)\prod_{i=1}^{n}\sin\pi\left(\frac{k_i}{\ell_i}\right)x_i\,dx_i,\quad i=\overline{1,n} \qquad (16)$$

$$B_{k_1,k_2,\dots k_n}=\frac{1}{\omega_{k_1,k_2,\dots,k_n}}\frac{2^n}{\ell_1,\ell_2\dots\ell_n}\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}\dots\int_0^{\ell_n}u_1(x)\prod_{i=1}^{n}\sin\pi\left(\frac{k_i}{\ell_i}\right)x_i\,dx_i, \qquad (17)$$

(16) və (17) əmsallarının (12)-(13)-də yerinə yazsaq:

$$u(x,t)=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left\{\frac{2^n}{\ell_1,\ell_2\dots\ell_n}\left[\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}\dots\int_0^{\ell_n}u_0(x)\prod_{i=1}^{n}\sin\pi\left(\frac{k_i}{\ell_i}\right)x_i dx_i\cos a\pi\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{k_i}{\ell_i}\right)^2\right)^{1/2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{a\pi\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{k_i}{\ell_i}\right)^2\right)^{1/2}}\cdot\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}\dots\int_0^{\ell_n}u_1(x)\prod_{i=1}^{n}\sin\pi\left(\frac{k_i}{\ell_i}\right)x_i dx_i\right]\prod_{i=1}^{n}\sin\pi\left(\frac{k_i}{\ell_i}\right)x_i, \qquad (18)$$

Qeyd 1. Əgər $k_1=k_2=\dots k_n=1$ olarsa (12) həllini xüsusi halda

$$u_{1,1,\dots,1}(x,t)=(A_{1,1,\dots,1}\cos\omega_{1,1,\dots,1}t+B_{1,1,\dots,1}\sin\omega_{1,1,\dots,1}t)\prod_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi x_i}{\ell_i},\qquad i=\overline{1,n}$$

Qeyd 2. $\sin\frac{k_{2i+1}}{\ell_{2i+1}}\pi x_{2i+1}\sin\frac{k_{2i}}{\ell_{2i}}\pi x_{2i}$ (tək və cüt indekslərin düzümünə görə yazılmış funksiyalar sistemi $\overline{D}:=\{(x,t):0\le x_i\le\ell_i,\ t\ge 0\}$ paralelpipedində aşağıdakı bərabərliklə ifadə olunur.

$$\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}\dots\int_0^{\ell_n}\sin\frac{k_1\pi}{\ell_1}x\sin\frac{k_3\pi}{\ell_3}x\dots\sin\frac{k_{2n+1}}{\ell_{2n+1}}\pi x\cdot\sin\frac{k_2\pi}{\ell_2}x\sin\frac{k_4\pi}{\ell_4}x\dots\sin\frac{k_n\pi}{\ell_{2n}}x\ \underbrace{dx\dots dx}_{tek\ sayda}\dots\underbrace{dx\dots dx}_{c\ddot{u}t\ sayda}=$$

$$=\begin{cases}0, & k_1\ne k_3\ne\dots\ne k_{2n+1},\ k_2\ne k_4\ne\dots\ne k_{2n}\\ \dfrac{\ell_1\ell_2\dots\ell_n}{2^n}, & k_1=k_3=\dots k_{2n+1},\ k_2=k_4=\dots=k_{2n}\end{cases}$$

Ədəbiyyat

1. Abbasov, Z.D. (2018). Riyazi fizika tənlikləri. Bakı, 380 s.
2. Koşlyakov, N.S. (1996). Osnovanıe diferensialnıe uravneniya matematicheskoy fiziki. Moskva, 768 s.
3. Tixonov, A.N., Samarskiy, A.A. (2007). Uravneniya matematicheskoy fiziki. Moskva, 786 s.
4. Şankov, V.V. (2017). Volnovıe uravneniya u uravneniya teploprovodnosti. Moskva, 44 s.
5. Trikomi, F.Dj. (2007). Lekchii po uravneniyam v chastnıx proizvodnıx. Moskva, 440 s.
6. Abbasov, Z.D. (2019). Primenenie metoda Furye k smeshanno qranichnoy zadachi. DOİ:10,3618, ESU. 2413-9335, №3 (60). 4 çast, s.42-45.
7. Koleşnikova, S.J. (2015). Metodı reshenie osnovnıx zadach uravneniy matematicheskoy fiziki. Moskva, 80 s.
8. Abbasov, Z.D. (2022) Determining of displacement of a string stretched from infinitely many points under the action of centralized force. Baku State University, “Actual problems of mathematics and mechanics” dedicated to the 99th birthday of the national leader of Azerbaijan Heydar Aliyev, May 11-13, Baku, p.6-7.
9. Abbasov, Z.D. (2023). Displacement of a string from finitely many points under the action of centralized forces in stationary mode., Modern Problems of Mathematics and Mechanics PROCEEDINGS of the International Conference dedicated to the 100-th anniversary of the National Leander Heydar Aliyev. Baku, 26-28 Aprel p.26-28.
10. Abbasov, Z.D. (2015). Change of a string tightly teed at the ends in a medium whose reistance of vibrations is proportional to the speed. Elmi Xabarlar, 1, Ganja, p.34-36.

Göndərilib: 25.06.2023 Qəbul edilib: 18.08.2023