ELMİ TƏDQİQAT Beynəlxalq onlayn elmi jurnal. İmpakt Faktor: 1.172. 2024 / Cild: 4 Sayı: 3 / 166-170
SCIENTIFIC RESEARCH International online scientific journal. Impact Factor: 1.172. 2024 / Volume: 4 Issue: 3 / 166-170 e-ISSN: 2789-6919

DOI: https://doi.org/10.36719/2789-6919/31/166-170

Gülnar Orucova
ADİU-nun Zaqatala filialı
alisgenderovgulnar@gmail.com

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNƏ AİD MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLİ

Xülasə

İndiki dövrdə ehtimal nəzəriyyəsi, statistika, çoxluqlar və birləşmələr nəzəriyyəsi bir-biri ilə sıx əlaqədə olsa da, hər biri inkişaf etdirilir. Situasiyaların mürəkkəbliyi, şərtlərdə dəyişmələrin sayının artması məsələ həllində sadəcə düsturların tətbiqini deyil, baş verən hadisələrin dəqiq bölünməsini, onların ayrı-ayrılıqda və birlikdə əlaqələndirilməsini tələb edir. Ehtimalın hesablanması ilə bağlı məsələlərdə asılı olan və bir-birindən asılı olmayan hadisələr düzgün seçilməlidir. Baxılan məqalədə belə məsələlərin müəyyən qisminin həlli üçün əməllər ardıcıllığı, hesablama tətbiq olunan düsturlar göstərilmişdir və istifadə olunmuşdur.

Açar sözlər: *Ehtimalların toplanması, ehtimalların vurulması, Bernulli düsturu, baş verə bilən hadisələrin sayı, hədəfə dəymə ehtimalı*

Gulnar Orujova
Zagatala branch of UNEC
alisgenderovgulnar@gmail.com

Solving problems related to Probability theory

Abstract

Today, probability theory, statistics, sets, and combinations are closely related, but each is being developed. The complexity of situations and the increase in the number of changes in conditions require not only the application of formulas in problem solving, but also the exact division of events, their separate and joint coordination. In matters of probability calculation, dependent and independent events must be chosen correctly. In the reviewed article, the sequence of actions, calculation formulas are shown and used for the solution of a certain part of such issues.

Keywords: *Addition of probabilities, multiplication of probabilities, Bernoulli's formula, number of possible events, probability of hitting the target*

Giriş

Tərif B hadisəsinin baş verməsi A hadisəsində baş vermə ehtimalını dəyişirsə, onda belə hadisələr asılı hadisələr adlanır. A və B hadisələri üçün ehtimalların vurulma qaydası.

$P(A \text{ və } B) = P(B) \cdot P(A\backslash B) = P(A) \cdot P(B\backslash A)$

Tərif: Əgər məcmuda $A_1, A_2, ... A_n$ hadisələrindən birinin baş verməsi ehtimalı elə həmin məcmuda digərlərinin baş verməsi ehtimalını dəyişməzsə, oda $A_1, A_2, ... A_n$ asılı olmayan hadisələr adlanır. Bu zaman aşağıdakı düstur doğru olur:

I $P(A_1 \cdot A_2, \cdot ..... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ..... \cdot P(A_n)$

II $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1) {}^{+} P(\bar{A}_2) + ... {}^{+} P(\bar{A}_n)$

Düstur $A_1, A_2, ... A_n$ hadisələrindən ən azı birinin baş verməsi düsturudur.

Nümunə: 4 atıcı eyni zamanda atəş açır. Hər bir atıcının hədəfə dəymə ehtimalı uyğun olaraq 0.7 : 0.8 : 0.6 : 0.5 kimidir. Heç olmasa bir atışla hədəfə dəymə ehtimalını tapın.

Həlli: Hədəfi vurmamaq ehtimalı $\overline{P_1} = 1 - P = 1 - 0.7 = 0.3$

$$\overline{P_1} \cdot \overline{P_2} \cdot \overline{P_3} \cdot \overline{P_4} = 0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.5 = 0.12 \cdot 0.1 = 0.012$$

Hədəfə dəymə ehtimalı P= 1-0.012-0.988 olur.

1. n elementdən ibarət çoxluğun elementlərinin yerdəyişmələrindən alınan n elementli çoxluqlar sayı ${}_nP_n = P_n = n!$ Kimi hesablanır və permutasiya adlanır. Məsələn:

$P_3 = \{a, b, c\}$ götürək

$\{a,b,c\}$ $\{b,a,c\}$ $\{c,a,b\}$ yerdəyişmələrdə
$\{a,c,b\}$ $\{b,c,a\}$ $\{c,b,a\}$ 6 çoxluq yaranır
və ya $P_3=3!=1\cdot2\cdot3=6$

2. n elementli çoxluğun $k(k\leq)$ sayda elementlərindən alınan çoxluqların (təkrarlanan) sayı ${}_nP_k=\frac{n!}{(n-k)!}$ Düsturu ilə hesablanır və bəzən aranjeman da adlanır.

$(A_n^k={}_nP_k)$ $\{a,b,c\}$ çoxluğunu götürək. 2 elementli yerdəyişmələrdən alınan bütün çoxluqları yazaq

$\{a,b\}$ $\{b,a\}$ $\{b,c\}$
$\{a,c\}$ $\{c,a\}$ $\{c,b\}$ 6 çoxluq alınır

Düsturla hesablasaq ${}_3P_2=\frac{3!}{(3-2)!}=\frac{1\cdot2\cdot3}{1}=6$

3. n elementli çoxluğun k sayda elementlərindən seçilmiş alt çoxluqları sayı kombinezon adlanır və ${}_nC_k=C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ Düsturu ilə hesablaır. Bu təkrarlanmayan çoxluqların sayıdır. Yenə $\{a,b,c\}$ 3 elementli çoxluğa baxaq

2 elementli alt çoxluqları
$\{a,b\}$ $\{a,c\}$ $\{b,c\}$ olar

Bəzi məsələlərə baxaq.

1. 30 nəfər şagirddən 2 növbətçi neçə üsulla seçilə bilər?

$N=C_{30}^2=\frac{30!}{2!(30-2)!}=\frac{29\cdot30}{1\cdot2}=29\cdot15=435$

2. 30 nəfərdən komanda üçün kapitan və köməkçi neçə üsulla seçilə bilər? Burada təkrarlanan hallar hesablanır.

Məsələn;		kapitan	köməkçi
	I	Anar	Əli
	II	Əli	Anar

Bunlar müxtəlif hallar kimi götürülür.

$N={}_{30}P_2=\frac{30!}{(30-2)!}=\frac{29\cdot30}{1}=870\ hal$

Hədəfin vurulmasına aid məsələlər:

Məsələ 1: İki atıcı eyni vaxtda hədəfə atəş açır. Hədəfə dəymə ehtimalı birinci atıcışda $P_1=0.6$, ikinci atıcıda $P_2=0.7$ kimidir. Hədəfdə bir deşik olması ehtimalı nəyə bərabərdir?

Həlli: I atıcının hədəfə dəymə ehtimalı $P_1=0.6$, vura bilməmə ehtimalı $q_1=1-P_1=1-0.6=0.4$ olur. Eyni qayda ilə II atıcının hədəfə dəymə ehtimalı $P_2=0.7$, dəyməmək ehtimalı isə $q_2=1-P_2=0.3$ olar. Burada iki müxtəlif vəziyyət ola bilər:

1) I atıcı vurmuşdur, II boşa çıxmışdır.
2) I atıcı boşa çıxmışdır, II hədəfi vurmuşdur.

I vəziyyətdə ehtimal $P(I)=P_1\cdot q_2=0.6\cdot0.3=0.18$

II vəziyyətdə ehtimal $P(II)=P_2\cdot q_1=0.7\cdot0.4=0.28$ olar

Yekun ehtimal $P=P(I)+P(II)=0.18+0.28=0.46$ olar.

Məsələ 2: İki atıcı hədəfə dəymə ehtimalları 0.7 və 0.8 olduqda, hərəsi 1 dəfə atəş açır. Hədəfin iki dəfə vurulma ehtimalını tapın.

Həlli: Hədəfin vurulması ehtimalı birinci atıcıda $P_1=0.7$, ikinci atıcıda $P_2=0.8$ olarsa, bu iki hadisənin eyni vaxtda baş vermə ehtimalı

$P=P_1\cdot P_2=0.7\cdot0.8=0.56$ olar.

Məsələ 3: Hədəfə dəymə ehtimalı 0.3 və 0.4 olan iki atəş açılır. Hədəfin heç olmasa 1 dəfə vurulması ehtimalını tapın.

Həlli: $A=\{heç\ olmasa\ bir\ atəş\ hədəfə\ dəymişdir\}$

$\bar{A}=\{heç\ bir\ atəş\ hədəfə\ dəyməmişdir\}$

kimi işarə edək. Aydındır ki, məsələdə axtarılan ehtimal $\bar{A}$ hadisəsinin ehtimalı tapıldıqdan sonra hesablanır

Axtarılan: $P(A)=1-P(\bar{A})$ olur.

Vurulma	Boşa çıxma
$P_1=0.3$	$q_1=1-P_1=0.7$
$P_2=0.4$	$q_2=1-P_2=0.6$

Boşa çıxma $P(\bar{A})=q_1q_2=0.7\cdot0.6=0.42$ ehtimalla baş verir.

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-0.42=0.58 \text{ olar.}$$

İndi isə bir az mürəkkəb, üç atıcının iştirak etdiyi hədəfi vurma yarışına baxaq.

Məsələ. Üç atıcı hədəfə dəymə ehtimalları uyğun olaraq P_1, P_2 və P_3 olub, hərəsi 1 dəfə atəş açır. Hədəfə 1,2,3 dəfə dəymə ehtimalını və heç bir dəyməsi olmamaq ehtimalını tapaq. Hadisələri,

A_1=(birinci atıcı hədəfi vurmuşdur)
A_2=(ikinci atıcı hədəfi vurmuşdur)
A_3=(üçüncü atıcı hədəfi vurmuşdur) kimi işarə edək.

Onda $P(A_1)=P_1$, $P(A_2)=P_2$, $P(A_3)=P_3$ olar.

Hədəfi vurmamaq ehtimalları:

$P(\bar{A}_1)=1-P_1=q_1$ $P(\bar{A}_2)=1-P_2=q_2$ $P(\bar{A}_3)=1-P_3=q_3$ olar

Hər üç atıcı atəş açdıqda hədəfi vurmamaq ehtimalı;

$P_0=P(\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3)=q_1q_2q_3$ olur.

İndi x_1 ilə üç atıcıdan ancaq birinin hədəfi vurma hadisəsinə baxaq.

I hal. Birinci atıcı vurur, qalan ikisi boşa çıxır

$A_1\cdot\bar{A}_2\cdot\bar{A}_3$ hadisəsinin ehtimalı $P(A_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3)$ olar

II hal. İkinci atıcı vurur, I və III boşa çıxır

ehtimalı $P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\bar{A}_3)$ olar

III hal. Ancaq üçüncü atıcı vurur, I və II atıcı boşa çıxır

Bu $P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(A_3)$ ehtimalla baş verir.

Bu üç hal birlikdə açılan 3 atəşdən ancaq biriin hədəfə dəymə hadisəsini əks etdirir.

Ehtimalı:

$P_1=P(X_1)=P(A_1)\,P(\bar{A}_2)\,P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)\,P(A_2)\,P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)\,P(\bar{A}_2)\,P(A_3)=$
$=p_1q_2q_3+q_1p_2q_3+q_1q_2p_3$ olur.

Eyni qalda ilə 3 atıcının bir dəfə atəş açdıqda hədəfə 2 dəymə ehtimalı:

$P(x_2)=p_1p_2q_3+p_1q_2p_3+q_1p_2p_3$ olur.

Hər üç atıcının 1 dəfə atəş açdıqda hədəfə dəymə ehtimalı

$P(x_3)=p_1p_2p_3$ olur

Belə bir məsələyə də baxaq.

Məsələ: Atıcının bir atəşlə hədəfi vurma ehtimalı 0.7-yə bərabərdir. 5 dəfə atəş açılır. Hədəfə heç olmasa bir dəfə dəymə ehtimalını tapın.

Həlli: $A=\{hədəf\ heç\ olmasa\ bir\ dəfə\ vurulub\}$ və onun əks hadisəsini isə

$\bar{A}=\{h5\ atəşdən\ heç\ biri\ hədəfə\ dəyməyib\}$ hadisələrini işarə edək. Əgər hədəfə dəymə ehtimalını p=0.7 ilə işarə etsək, hədəfi vura bilməmək ehtimalı $q=1-p=1-0.7=0.3$ olar.

Onda beş dəfə boşa çıxma ehtimalı

$P(\bar{A})=q^5=0.3^5$ olar

Hədəfin heç olmasa bir dəfə vurulma ehtimalı (bütün qalan hallarda)

$P(A)=1-P(\bar{A})=1-0.3^5=1-0.00243\approx 1-0.002\approx 0.998$ olar.

Məsələ 1. Qəpik 3 dəfə atılıb. 2 dəfə xəritə üzünün düşməsi ehtimalını tapın.

$p=P(A)=\frac{1}{2}$ - Rəqəm üzü düşmə ehtimalı

$q=1-p=\frac{1}{2}$ - Gerb (xəritə) üzünün düşmə ehtimalını işarə edək.

N=3 (hadisələr sayı)

K=2 (xəritə üzünün düşmə sayı) olarsa, baxılan hadisənin ehtimalı

$P=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ Bernulli düsturu ilə hesablanır.

(n sayda təcrübədə k sayda hadisənin baş vermə ehtimalıdır).

Bu məsələdə,

Ehtimal $p = C_3^2 p^2 (1-p)^{3-2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}$ olar.

Məsələ 2. Gün ərzində yağış yağma ehtimalı 0.2-yə bərabərdir. Həftə ərzində 3 gün yağış yağması ehtimalını tapın.

Həlli: $p = P(A) = 0.2, \quad n = 7, \quad k = 3$

$P(A) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_7^3 0.2^2 (1-0.2)^{7-3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3} \cdot \frac{1}{125} \cdot \frac{256}{625}\ olur.$

Məsələ 3. Avtomatik konveyer batareya daşları hazırlayır. Hazır batareya daşının yararsız olma ehtimalı 0.05-dir. Qutulara yığmazdan əvvəl yoxlama keçirilir. Yoxlamada xarab batareya daşının müəyyən olma ehtimalı 0.98-ə bərabərdir. İşlək daşın yararsız kimi səhvən müəyyən olma ehtimalı 0.08-ə bərabərdir. Təsadüf seçilmiş bir batareya daşının yoxlamada yararsız təyin olunma ehtimalını tapın.

Həlli: 2 hal mümkündür

A. – Batareya işləkdir, amma xarab kimi təyin olunur.

B. – Batareya xarabdır və xarab kimi təyin olunur.

A. Batareya işləkdir ehtimalı P(A)=1-0.05=0.95

Xarab kimi təyin olunma ehtimalı 0.08 olarsa,

Bu hadisənin P(A)=0.95 · 0.08=0.076 olur.

P(B) = 0.05 · 0.98 = 0.049

P(A+B)=P(A)+P(B)= 0.076+0.049=0.125

Məsələ 4. Aqrifirma I təsərrüfatdan 60%-i, II təsərrüfatdan 40%-i keyfiyyətli yumurta alır. Bütövlükdə alınan yumurtaların 48%-i keyfiyyətlidir. Bu aqrofirmadan alınan yumurtanın I təsərrüfatdan olması ehtimalını tapın.

Həlli: x - I təsərrüfatdan alınma ehtimalı

(1-x) - II təsərrüfatdan alınma ehtimalı

I təsərrüfatdan keyfiyyətli yumurta olması ehtimalı 0.6· x

I təsərrüfatdan keyfiyyətli yumurta olması ehtimalı 0.4· $(1-x)$ olar

0.6x + 0.4(1-x)=0.48

Həlli x=0.4 olur

Məsələ 5. Hədəfin birinci mərmi ilə vurulma ehtimalı 0.3, sonrakı mərmilərlə vurulma ehtimalı 0.9-a bərabərdir. Hədəfin məhv olunması ən azı 0.96 ehtimallı olduqda, neçə mərmi atılmalıdır?

Həlli: I atəşda vurma ehtimalı P_1=0.3

II atəşdə vurulması $P_2^1 = (1-0.3)\cdot(1-0.9) = 0.07$

Vurulma 1-0.07=0.93

III atəşdə vurulması $P_3^1 = (1-0.3)\cdot(1-0.9)^2 = 0.7 \cdot 0.01 = 0.07$

Vurulması P_3=1-0.007=0.993>0.96 olur

Cavab: 3 atəş

Məsələ 6. Ailədə 5 uşaq var. Onların üçünün oğlan olması ehtimalını tapın.

Həlli. Oğlan olma ehtimalı

Uşaq anadan olanda p=$\frac{1}{2}$ olur.

Oğlan olmama ehtimalı q=1-p=$\frac{1}{2}$ olur.

Bernulli düsturunu tətbiq edək:

- Hadisələrin tam sayı =5
- Oğlan olması sayı k=3

P(0)= $C_n^k p^k q^{n-k} = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4\cdot5}{1\cdot2} \cdot \frac{1}{8\cdot4} = \frac{5}{16}\ olar.$

Nəticə

Baxılan məsələnin həlli əslində böyük bir bölmənin çox kiçik bir hissəsini əhatə edir. Demək olar ki, tanışlıq məqsədi daşıyır. Çalışdıq ki bir neçə halda düsturların tədbiqini, hadisələrin təsnifatını göstərə bilək.

Ədəbiyyat

1. Yaqubov, M., Abdullayev, İ. Ümumi redaktəsi ilə, s.397-402.
2. Əliməmmədov, R. (2016). Riyaziyyat. Abituriyentlər üçün dərs vəsaiti. Gülşən nəşriyyatı, s.200-204.
3. Qəhrəmanova, N., Kərimov, M., Hüseynov, İ. (2022). Riyaziyyat 10. Bakı. Metodik vəsait, s.223-237.
4. Qəhrəmanova,N., Kərimov, M., Quliyev, Ə. (2018). Riyaziyyat 11. Metodik vəsait. AR Təhsil Nazirliyi. Bakı, s.226-231.
5. Qəhrəmanova, N., Kərimov, M., Quliyev, Ə. (2018). Riyaziyyat. Derslik 11. Bakı, s.274-281.
6. Qəhrəmanova, N., Kərimov, M., Hüseynov, İ. (2019). Riyaziyyat. Derslik 8. Bakı, s.208-214.
7. Qəhrəmanova, N., Kərimov, M., Hüseynov, İ. (2017). Riyaziyyat. Derslik 10. Bakı, s.301-306.
8. Qəhrəmanova, N., Kərimov, M., Hüseynov, İ. (2017). Riyaziyyat. Derslik 9. Bakı, s.228-242

Göndərilib: 02.02.2024 Qəbul olunub: 19.03.2024