

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA MATHEMATICS AND MECHANICS

<https://doi.org/10.36719/2789-6919/42/151-156>

Əli Zalov

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
kimya üzrə elmlər doktoru
<https://orcid.org/0000-0002-2171-8906>
zalov1966@mail.ru

Sürayyə İsayeva

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru
<https://orcid.org/0009-0000-9488-1811>
surayye.necefova@gmail.com

Çoxpilləli ekstraksiya prosesinin təsviri

Xülasə

Ekstraksiya iki qarışmayan mayelər arasında maddənin fiziki-kimyəvi paylanma prosesi və maddələrin uyğun ayrılma, parçalanma və qatılaşdırma üsuludur. Ekstraksiya zamanı aşağıdakı proseslər baş verir: ekstraksiya olunan birləşmələrin yaranması, su və üzvi fazalar arasında ekstraksiya olunan birləşmələrin paylanması və üzvi fazada baş verən reaksiyalar – dissosiasiya, assosiasiya və polimerləşmə. Metal ionunun və digər yüklü zərrəciklərin üzvi fazaya keçməsi üçün yükü neytrallaşdırmaq lazımdır. İon assisotlarının ekstraksiyası zamanı ionlarının yükü və ölçüsü mühümdür: ionların yükü artdıqca və ölçüsü azaldıqca ekstraksiya pisləşir. Digər bərabər şəraitlərdə birləşməli ionlar pis ekstraksiya olunur. Digər bərabər şəraitlərdə daha davamlı komplekslər yaxşı ekstraksiya olunur.

Açar sözlər: ekstraksiya, qatılıq, məhlul, maddə miqdarı, xüsusi törəmə, ikidəyişənli funksiya, ekstremum, həlledici maddə, paylanma əmsali, həcm

Ali Zalov

Azerbaijan State Pedagogical University
Doctor of Science in Chemistry
<https://orcid.org/0000-0002-2171-8906>
zalov1966@mail.ru

Suraya Isayeva

Azerbaijan State Pedagogical University
PhD in Mathematics
<https://orcid.org/0009-0000-9488-1811>
surayye.necefova@gmail.com

The Description of a Multi-stage Extradition Process

Abstract

Extraction is the process of the physicochemical distribution of a substance between two immiscible liquids, as well as a method for separating, isolating, and concentrating substances. During extraction, the following processes occur: the formation of extractable compounds, the distribution of extractable compounds between the aqueous and organic phases, and reactions occurring in the organic phase-dissociation, association, and polymerization. For the transfer of metal ions and other charged particles into the organic phase, it is necessary to neutralize their charge.

In the extraction of ion-associates, the charge and size of the ions are significant: as the charge increases and the size decreases, the extraction efficiency deteriorates. Under equal conditions, monovalent ions are extracted less effectively. Under equal conditions, more stable complexes are extracted more efficiently.

Keywords: extraction, concentration, solution, amount of substance, partial derivative, function of variables, extremum, solvent, partition coefficient, volume

Giriş

Çoxpilləli ekstraksiya prosesi müasir kimya və mühəndislik sahələrində istifadə olunan metodlardan biridir. Ekstraksiya prosesinin effektivliyi bir neçə parametrdən, o cümlədən paylanma əmsalı, paylanma dərəcəsi və mərhələlərin sayından asılıdır. Bu məqalədə çoxpilləli ekstraksiya prosesinin nəzəri əsasları, riyazi modelləşdirilməsi və xüsusi törəmələr vasitəsilə analizi təqdim olunur.

Tutaq ki, xOy koordinat müstəvisində verilmiş G çoxluğunun hər bir $M(x; y)$ nöqtəsinə müəyyən bir qayda ilə yeganə $f(x, y)$ ədədi qarşı qoyulur. Bu halda deyirlər ki, G çoxluğunda təyin edilmiş f funksiyası verilmişdir və bu, aşağıdakı kimi yazılır:

$$f(x, y), (x, y) \in G \quad (1)$$

Mərkəzi $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsində olan hər bir açıq dairə (çevrəsiz dairə) həmin nöqtənin ətrafı adlanır. $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsinin δ -ətrafı $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$ və ya $|MM_0| < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən $M(x; y)$ nöqtələri çoxluğudur.

Əgər $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsinin istənilən δ -ətrafında G çoxluğunun sonsuz sayda nöqtəsi varsa, bu nöqtə həmin çoxluğun limit nöqtəsi adlanır.

Tərif 1. Tutaq ki, $f(x, y)$ funksiyası G çoxluğunda təyin edilmiş və $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsi bu çoxluğun limit nöqtəsidir. Əgər G -yə daxil olan və $\lim_{n \rightarrow \infty} |MM_0| = 0$ şərtini ödəyən istənilən $\{M_n(x_n, y_n)\}$ ardıcılığı üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = A$$

olarsa, onda A ədədi $M(x; y) \rightarrow M_0(x_0; y_0)$ olduqda $f(x, y)$ funksiyasının limiti adlanır. Bunu belə yazırlar:

$$\lim_{\substack{x_n \rightarrow x_0 \\ y_n \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

Tərif 2. Tutaq ki, $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsi $f(x, y)$ funksiyasının təyin oblastına daxildir və onun limit nöqtəsidir. Əgər

$$\lim_{\substack{x_n \rightarrow x_0 \\ y_n \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

olarsa, onda deyirlər ki, $f(x, y)$ funksiyası $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsində kəsilməzdir.

Tutaq ki, $z = f(x, y)$ funksiyası $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsinin müəyyən bir ətrafında təyin edilmişdir. y dəyişənin qeyd olunmuş y_0 qiymətində $z = f(x; y_0)$ funksiyası birdəyişənli funksiya olur. $z = f(x; y_0)$ funksiyasının x_0 nöqtəsindəki törəməsi ikidəyişənli $f(x, y)$ funksiyasının $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsində x -ə görə xüsusi törəməsi adlanır və $\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x}$ kimi işarə edilir:

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x; y_0) - f(x_0; y_0)}{x - x_0}$$

Analoji olaraq funksiyanın y -ə görə xüsusi törəməsi təyin edilir.

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0; y) - f(x_0; y_0)}{y - y_0}$$

$M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsi ixtiyari nöqtə olduqda $f(x, y)$ funksiyanın xüsusi törəmələri

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x; y)}{\partial y}$$

kimi yazılır. $f(x, y)$ funksiyanın xüsusi törəmələrini başqa cür də işarə edirlər.

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = f'_x(x; y), \quad \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = f'_y(x; y)$$

və ya

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = f'_x, \quad \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = f'_y.$$

(Alməmmədov, Qarayev, Quluzadə, 2013, s. 162-173).

Beləliklə, f'_x -i tapmaq üçün y -i sabit kimi qəbul edib, $f(x, y)$ funksiyanın x -ə görə törəməsini tapmalıyıq, f'_y -i tapmaq üçün x -i sabit kimi qəbul edib $f(x, y)$ funksiyanın y -ə görə törəməsini tapırıq.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ və $\frac{\partial f}{\partial y}$ funksiylarının xüsusi törəmələrinə ikinci tərtib xüsusi törəmələr deyilir. İkinci

tərtib xüsusi törəmələr aşağıdakı kimi işarə edilir.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

İkinci tərtib xüsusi törəmələr aşağıdakı kimi də yazılır:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$$

$f''_{xy}(x, y)$ və $f''_{yx}(x, y)$ xüsusi törəmələri qarışıq xüsusi törəmələr adlanır. İsbat etmək olar ki, əgər $f(x, y)$ ikidəyişənli funksiyası kəsilməzdirsə, onda

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

G -oblastında kəsilməz $z = f(x, y)$ funksiyanı baxaq. Əgər $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsinin hər hansı ətrafına daxil olan bütün $M(x; y)$ ($M \neq M_0$) nöqtələri üçün $f(x; y) < f(x_0; y_0)$ ($f(x; y) > f(x_0; y_0)$) bərabərsizliyi ödənilirsə, onda $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsi $f(x, y)$ funksiyanın maksimum (minimum) nöqtəsi, $f(x_0; y_0)$ isə həmin funksiyanın maksimumu (minimumu) adlanır (Kərimov, 1998, s. 11-21).

Teorem (ekstremumun varlığı üçün zəruri şərt). $z = f(x, y)$ funksiyası $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsində ekstremum qiymət alırsa və bu nöqtədə birinci tərtib xüsusi törəmələri varsa, onda həmin xüsusi törəmələr $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsində sıfıra bərabər olar:

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} = 0$$

Teorem (ekstremumun varlığı üçün kafi şərt). Tutaq ki, $z = f(x, y)$ funksiyasının $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsinin hər hansı ətrafında ikinci tərtibə qədər kəsilməz xüsusi törəmələri var və $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsində

$$f'_x(x_0; y_0) = f'_y(x_0; y_0) = 0$$

şərtləri ödəyir.

$A = f''_{xx}(x_0; y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0; y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0; y_0)$, $D = AC - B^2$ işarə edək. Onda $z = f(x, y)$ funksiyası $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsində

- 1) əgər $D > 0$ və $A > 0$ olarsa, minimum qiymət alır,
- 2) əgər $D > 0$ və $A < 0$ olarsa, maksimum qiymət alır,
- 3) əgər $D < 0$ o olarsa, ekstremum yoxdur (Məmmədov, 1976, s. 95-103).

Tədqiqat

Yüksək dərəcəli maddə çıxarışına nail olmaq üçün ekstraksiya prosesi adətən bir neçə dəfə təkrarlanır və hər dəfə yeni ekstraktın partiyası istifadə olunur. Hər bir mərhələdə çıxarılan məhsul fazalar arasında paylanma əmsalına k nisbətində bərabər bölüşdürülür:

$$y = kx \quad (2)$$

burada x-ilkin məhlulda çıxarılan maddənin qatılığı, y-ekstraktorda olan maddənin qatılığıdır. k-nın konkret qiyməti həlledicinin və çıxarılan maddənin təbiətindən asılıdır (Batuner, Pozin, 1971, s. 823).

Ekstraksiya prosesinin riyazi modelini qurmaq üçün maddələrin balans tənliyi istifadə olunur: növbəti (i-ci) mərhələdə məhlulda və ekstraktorda olan maddələrin miqdarı toplanır. Bu aşağıdakı kimi ifadə olunur.

$$ax_{i-1} = y_i b_i + ax_i$$

burada a-ekstraksiya edilən məhlulun həcmi, b-istifadə olunan ekstragentin həcmi, i-ekstraksiya mərhələsinin nömrəsidir.

Tənlik (2)-dən istifadə edərək aşağıdakı nəticəni əldə etmək olar:

$$ax_{i-1} = kx_i b_i + ax_i$$

Buradan hər bir çıxarma mərhələsindən sonra çıxarılan maddənin qatılığını müəyyənləşdirmək üçün rekursiv düstur alırıq:

$$x_i = \frac{ax_{i-1}}{a + kb_i}$$

İstənilən n-ci ekstraksiya üçün

$$x_n = \frac{ax_n - 1}{a + kb_n}$$

burada

$$x_{n-1} = \frac{ax_{n-2}}{a + kb_{n-1}}, \quad x_{n-2} = \frac{ax_{n-3}}{a + kb_{n-2}}, \dots, \quad x_1 = \frac{ax_0}{a + kb_1}$$

(Emanuel, Kporre, 1984, s. 463).

Nəticədə alırıq:

$$x_n = \frac{a^n x_0}{\prod_{i=1}^n (a + kb_i)} \quad (3)$$

Qeyd: Çoxmərhələli ekstraksiyada (3) ifadəsi prosesin istənilən mərhələsində qatılıqların qiymətlərini almağa, birmərhələli və ikimərhələli ekstraksiyaların səmərəliliyini ilkin məhlulda

maddənin qatılığına dəyişməsinə görə müqayisə etməyə imkan verir. Bir mərhələli ekstraksiyadan sonra məhlulda maddənin qatılığı:

$$x_1 = \frac{ax_0}{a + kb_1}$$

İki mərhələli ekstraksiyadan sonra (həllədiçi ekstragentin həcmi iki bərabər hissəyə bölünür):

$$x_2 = \frac{a^2 x_0}{(a + k \frac{b}{2})^2}$$

Onda
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{(a + \frac{kb}{2})^2}{a(a + kb)} = \frac{a^2 + akb + 0,25k^2 b^2}{a^2 + akb} = 1 + \frac{0,25k^2 b^2}{a(a + kb)},$$

Buradan görünür ki, $x_2 < x_1$ olduqda

$$\frac{0,25k^2 b^2}{a(a + kb)} > 0$$

Beləliklə, iki mərhələli ekstraksiyadan sonra məhluldakı qatılıq bir mərhələli ekstraksiyadan sonra olduğundan daha çox azalır (Skateçkiy, Yaşkin, s. 6-27).

Sirkə turşusunun ekstraksiyası. (2) nisbətindən istifadə edərək, verilmiş ekstragentin hissələrə necə bölünməsi ilə nəticədə verilən məhluldan daha çox miqdarda maddə əldə etmək olar sualına cavab tapmaq olar. Bu məsələni su məhlulundan sirkə turşusunun ekstraksiyası misalında nəzərdən keçirək:

Məsələ: Müəyyən həcmdə və ilkin qatılıqda sirkə turşusunun suda olan məhlulu var. Həllədiçi kimi həcmi B olan benzol istifadə olunur. Ardıcıl ekstraksiyalar üçün benzol b_i ($i = 1, 2, \dots$) həcmli hissələrə bölünür. Hər ekstraksiya zamanı maddələrin məhlul və həllədiçi arasında paylanması (2) xətti paylanma qanununa uyğun olaraq baş verir, burada x-ekstraksiya olunacaq qarışımda sirkə turşusunun son qatılığı, y-benzoldakı sirkə turşusunun son qatılığı, $k > 0$ -paylanma əmsalındır. Maksimum miqdarda sirkə turşusunu su məhluldan çıxarmaq üçün həllədiçi B-ni hansı üç hissəyə ayırmaq lazımdır? (Skateçkiy, 1981, s. 144-150).

Həlli: Üç ardıcıl ekstraksiyadan sonra məhluldakı turşunun qatılığı:

$$x_3 = \frac{a^3 x_0}{(a + kb_1)(a + kb_2)(a + kb_3)}$$

Aydındır ki, məxrəc maksimum olduqda kəsr ən kiçik qiymətini alacaq, çünki ədədi hissə sabitdir. Buna görə də, son kəsrin məxrəci olan

$$u = (a + kb_1)(a + kb_2)(a + k(B - b_1 - b_2))$$

funksiyasının maksimumunu tapmaq lazımdır. Burada b_3 əvəzinə

$B = b_1 + b_2 + b_3$ bərabərliyindən tapılan qiymət qoyulmuşdur. Xüsusi törəmələri tapmaq

$$\frac{\partial u}{\partial b_1} = k^2(kb_2 + a)(B - 2b_1 - b_2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial b_2} = k^2(kb_1 + a)(B - b_1 - 2b_2)$$

Bunları 0-a bərabər edək:

$$(B - 2b_1 - b_2) = 0$$

$$(B - b_1 - 2b_2) = 0$$

Birinci tənliyi $k^2(kb_2 + a) \neq 0$, ikinci tənliyi $k^2(kb_1 + a) \neq 0$ -a bölərək sadələşdirib

$$b_1 = b_2 = 0 \text{ alırıq.}$$

Deməli, b_1, b_2 və b_3 dəyişənləri $\frac{B}{3} -$ ə bərabərdir, yəni stasionar bir $P(\frac{B}{3}, \frac{B}{3})$ nöqtəsi əldə etmişik.

Bu nöqtəni çoxdəyişənli funksiyanın ekstremumunun kafi şərtini tətbiq etməklə araşdıraraq (Korn, 1974, s.832).

Bunun üçün

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial b_1^2} &= -2k^2(kb_2 + a); \\ \frac{\partial^2 u}{\partial b_1 \partial b_2} &= k^3(B - 2b_1 - b_2) - k^2(kb_2 + a); \\ \frac{\partial^2 u}{\partial b_2^2} &= -2k^2(kb_1 + a)\end{aligned}$$

İkinci tərtib xüsusi törəmələr tapılır və P_0 nöqtəsində qiymətləri hesablanır:

$$\frac{\partial^2 u(P_0)}{\partial b_1^2} = -2k^2\left(\frac{kB}{3} + a\right); \quad \frac{\partial^2 u(P_0)}{\partial b_1 \partial b_2} = -k^2\left(\frac{kB}{3} + a\right); \quad \frac{\partial^2 u(P_0)}{\partial b_2^2} = -2k^2\left(\frac{kB}{3} + a\right).$$

Buradan görünür ki, qarışıq törəmələr 0-dan kiçikdir.

$$\det M(P_0) = 4k^4\left(\frac{kB}{3} + a^2\right) - k^4\left(\frac{kB}{3} + a\right)^2 = 3k^4\left(\frac{kB}{3} + a\right)^2 > 0$$

Deməli, P_0 - u funksiyanın maksimum nöqtəsidir.

Beləliklə, ardıcıl ekstraksiya zamanı su məhluldan sirkə turşusunun maksimum miqdarını çıxarmaq üçün məhlulu bərabər hissələrə bölmək lazımdır (Stepanov, Erlekina, Filippov, 1976, s.366).

Nəticə

Çoxpilləli ekstraksiya prosesi müxtəlif qarışıq sistemlərdən hədəf komponentlərin ayrılmasını və ya qatılığını təmin edən mürəkkəb proseslərdən biridir. Bu proses kimya, farmakologiya və digər mühəndislik sahələrində geniş tətbiq olunur. Çoxpilləli ekstraksiya ardıcıl fazalararası kütlə mübadiləsi mərhələlərini əhatə edir. Məqsəd ilkin qarışıqdan (maye-maye, maye-qatı və ya bəzən qaz-maye) komponentlərin müəyyən bir həlledici vasitəsilə ayrılmasıdır. Xüsusi törəmələr bu prosesin riyazi modelləşdirilməsində istifadə olunur və hər bir mərhələdəki komponentlərin miqdarını və paylanmasını izah edir.

Ədəbiyyat

1. Alməmmədov, M.S., Qarayev, M.İ., Quluzadə, T.H. (2013). *Ali riyaziyyatdan mühazirə mətnləri*.
2. Batuner, B.E., Pozin, M.E. (1971). *Matematicheskie metodi v ximicheskoy technologii*.
3. Emanuel, N.M., Kporre, D.Q. (1984). *Kurs ximicheskoy kinetiki*.
4. Kərimov, K.R. (1998). *Ali riyaziyyat*.
5. Korn, T. (1974). *Spravochnik po matematike*.
6. Məmmədov, R. (1976). *Ali riyaziyyat (II hissə)*.
7. Skatechkiy, V.G., Yaşkin, A.M. (2005). *Matematicheskie metody i sxemi*.
8. Skatechkiy, V.G. (1981). *Matematicheskoe modelirovanie fiziko-ximicheskix prosesov*.
9. Skatechkiy, V.G. (2000). *Leksii po matematike dlya studentov ximicheskix specialnostey*.
10. Stepanov, N.F., Erlekina, M.E., Filippov, Q.Q. (1976). *Metodi lineynoy algebrı v fizicheskoy ximii*.

Daxil oldu: 03.11.2024

Qəbul edildi: 12.02.2025