

DOI: <https://doi.org/10.36719/2663-4619/113/296-299>

İradə Şərifova

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti

<https://orcid.org/0009-0008-3970-8061>

irada.sharifova.85@mail.ru

Dekart hasillərin və filtirlərin Replik sistemlərdə tətbiqi

Xülasə

Çoxobrazlılar və Kvaziçoxobrazlılar nəzəriyyələri cəbr və riyazi məntiq nəzəriyyələri əsasında eyniliklər cəbri sistemlər siniflərini öyrənir. Kvaziçoxobrazlılar haqqında ilk nəticələr konkret cəbri problemlərin həlli ilə bağlıdır. Cəbr və riyazi məntiqin müstəqil bölməsi kimi kvaziçoxobrazlılar nəzəriyyəsi Maltsevin, Yonsonun, Makkenzinin və digərlərinin elmi işlərində öz əksini tapmışdır. Kvaziçoxobrazlılar nəzəriyyəsində ilk ümumi nəticələr nəzəri-model metodları vasitəsi ilə alınmışdır. Kvaziçoxobrazlılar nəzəriyyəsi daxilində modellər nəzəriyyəsinin bir çox problemlərini həll etmək mümkün olmuşdur. Buna görə də tətqiqat işi topoloji çoxobrazlılar üçün əhəmiyyət kəsb edir.

Açar sözlər: çoxobrazlı, kvaziçoxobrazlı, topologiya, replik sistemlər, dekart hasillər

Irada Sharifova

Azerbaijan State Pedagogical University

<https://orcid.org/0009-0008-3970-8061>

irada.sharifova.85@mail.ru

Application of Cartesian Products and Filters in Replic Systems

Abstract

The theories of manifolds and quasimanifolds investigate classes of algebraic systems defined by identities, based on the foundations of algebra and mathematical logic. The initial results on quasimanifolds were derived in connection with the solution of specific algebraic problems. As an independent branch of algebra and logic, the theory of quasimanifolds has been developed in the works of Malcev, Jónsson, McKenzie, and others. The first general results in this field were obtained using model-theoretic methods, which have made it possible to address numerous problems in model theory. Therefore, this research is of significant importance for the study of topological manifolds.

Keywords: manifold, quasimanifold, topology, replic systems, Cartesian products

Giriş

Müxtəlif simvolların ixtiyari toplusu əlifba adlanır. Fərz olunur ki, biz hər biri özünü və ya əlifbanın hərflərdən ibarət ixtiyari sonlu ardıcılığa baxa bilərik. Bu hərflər ardıcılığı verilmiş əlifbada sözlər adlanır. Daha sonra biz əlifbanın simvollarını onun “yenidən yaratdığı” hərflərindən fərqləndirməyəcəyik. Məsələn, fərz edək ki, əlifba $0, 1, +, =, a, b$ simvollarından ibarətdir.

$$aa, abab, a+=l, 0+l=l, +l=++a$$

ardıcılıqları mahiyyət etibarı ilə verilmiş əlifbada sözlərdir. Əgər onlar eyni uzunluğa malikdirlərsə və uyğun hərfləri bərabədirsə onda onlar iki söz (qrafik olaraq) bərabər adlanır. Verilmiş əlifbada bütün sözlər toplusu (məcmusu, çoxluğu) bu əlifbada formal dil adlanır. Verilmiş formal dilin sözlərinin xüsusiyyətlərindən danışmaq üçün dilin əlifbasına aid olmayan bəzi simvollarından istifadə edirik. Bu simvollar işarə dilinin simvolları və ya işarə simvolları adlanır. Xüsusi halda “formal dilin hər hansı A və B sözlərinə baxaq” ifadəsində A, B hərfləri formal dilin əlifbasına daxil deyil və işarə simvoludurlar (metasimvol). Beləliklə, fərz edək A, B -hər hansı formal dilin sözləridir. Əvvəlcə birinci A sözünün hərflərini, sonra isə B sözünün bütün hərflərini yazmaqla

yeni söz alarıq ki, bu da A,B sözlərinin kompozisiyası adlanır və AB ilə işarə olunur. Hərdən onu nöqtə ilə də işarə edirlər ki, bu da sözlərin hasili əməliyyatı adlanır. Əlbəttə bu əməliyyatın nəticəsi söz -vuruqların düzülüşündən asılıdır. Məsələn,

$$aba- ba=ababa, ba- aba=baaba.$$

Ancaq aydındır ki, sözləri kompozisiyası əməliyyatı assosiativdir.

Tədqiqat

Verilmiş formal dildə təyin olunmuş sözlərlə yanaşı hərdən boş söz adlandırılan A xüsusi simvoluna da baxılır. Tərifə görə (Baxşəliyev, & Əbdülkərimov, 2011; Məmmədov, 2014):

$$\mathbb{I}- A=A-\mathbb{I}=A$$

hesab edilir və boş sözün uzunluğunu o ədədi adlandırılır.

Əgər $X_h Y_h X_2, Y_2, \dots, X_n, Y_n (I)$ tənliyinin bütün həlləri və

$$uz. X_1 < uz. X_2 < \dots < uz. X_n$$

(burada $uz.$ sözün uzunluğunu bildirir) olarsa X, Y üçün sa , onda: $X_h Y_1$ həlləri A_1 -in A -ya birinci daxil olmasına uyğun, $X_2 Y_2$ həlləri isə ikinci daxil olmaya uyğun həllərdir və s. Burada X, Y üçün $X=A$ və ya $Y=A$ ola bilər. Əgər $X|A$ olarsa, onda $A]$ A -nın başlanğıc hissəsi və ya başlanğıc alt sözü adlanır. Deyilənə uyğun olaraq A baş sözü

$$A-.a/ \dots A- a_2 \dots a_m = a \dots a_1 a_2 \dots a_m ' A .$$

Ayrılışından görünən m uzunluqlu sözləri $m+1$ daxilolmasıdır.

Fərz edək ki, $A_1 - A$ sözünün altsözüdür, B isə hər hansı verilmiş sözdür. $A]$ -in A -ya $A=XA|Y$ ayrılışına cavab verən z -ci daxilolmasına baxaq. XY sözü B sözünün A sözündə $A!$ sözünün z -ci daxilolmasının əvəzinə əvəzetmə nəticəsi adlanır, simvolik olaraq,

$Sb](A; A/, B)$ ilə işarə olunur,

Burada Sb_i -əvəzetmə əməliyyatının simvoludur.

Məsələn:

$$Sb_2(abac; a, c) = abcc, Sb_i(ab; A, c) = cab,$$

$$Sb_1(cab; a, A) = cb$$

Teorem 1. Fərz edək ki, S - U - cəbrini doğuran elementlər toplusu, a isə S -in U ilə eyni tipli olan p cəbrinə inkasıdır. a^* inkasının P -dakı U homomorfizminə qədər davam etdirilə bilməsi üçün zəruri və kafi şərt U signaturanın ixtiyari $T_b T_2$ termi və s.-dən olan ixtiyari $al, \dots, ar$ üçün

$$T_1(al, \dots, ar) = T_2(al, \dots, ar) = >$$

$$=> T_1(a, a^*, \dots, a^*) = T_2(a_1 a^*, \dots, a^*)$$

Tərif 1. ekvivalentlik münasibətinin M çoxluğunda indeksi $M!$ t faktor çoxluğunda yanaşı siniflərin gücünə (sonlu olduqda sayına) bərabərdir (Dzhabbarzade, 1980; Artamonov, 1990).

Teorem 2. μ ümumi cəbri sonlu cəbrlərin dekart hasilin olduqda alınır ki, μ cəbrinin tam asılı olmayan sonlu indeksli konqrensialar külliyyatına malik olsun.

Teorem 3. Ən ümumi cəbri ümumi cəbrlərin dekart hasilinə onda və ancaq onda ayrılır ki, ən cəbri tam asılı olmayan konqrensialar külliyyatına malik olsun.

Qruplar, halqalar və klassik cəbrin digər bölmələrində dekart hasil konstruksiyasının mühüm əhəmiyyət kəsb etməsi, əsasən qrupların dekart hasillərinin qrup, halqaların dekart hasillərinin halqa və sairə olmasıdır. Birinci tərtib nəzəriyyənin bir çox xassələri üçün çox vaxt dekart hasil konstruksiyası yararlı olmur, belə ki, müəyyən xassəyə malik olan ümumi cəbrlərin dekart hasilləri bu xassəyə malik olmur. 50-ci illərin sonlarında ümumi cəbrlərin I tərtib nəzəriyyəyə aid xassələrini

özündə saxlayan ultrahasilləri konstruksiyası yarandı.

Tərif 2. Boş olmayan I çoxluğunun alt çoxluqlar çoxluğunun müəyyən D alt çoxluğu aşağıdakı şərtləri ödəyərsə (Grettser, 1982; Gorbunov, 1998):

i) D -dən olan istənilən iki alt çoxluğun kəsişməsidə D daxildir.

ii) D daxil olan hər alt çoxluğu özündə saxlayan alt çoxluqda D daxildir.

iii) Boş çoxluq 0 D -yə daxil deyil. I çoxluğu üzərində filtr adlanır, i), ii) şərtlərindən asanlıqla alınır ki, D -yə daxil olan ixtiyari alt çoxluqların kəsişməsidə D -yə daxildir. I bazis çoxluğuda D filtrinədə daxildir. I çoxluğunun müəyyən $M \subset I$ alt çoxluğunu özündə saxlayan alt çoxluqlar sinfidə i) ii) və iii) şərtlərini aydındır ki, ödəyir filtrdir (Birkhoff, & Barti, 1976). Xüsusi halda I özündə ayrılıqda bir sinif kimi götürülərsə filtr adlanır. Bu tip filtrlər baş filtrlər adlanır. Yerdə qalan filtrlər baş olmayan filtrlər adlanır. Aydındır ki, F fikiri onda ancaq onda baş fikir olur ki, ona daxil olan bütün alt çoxluqların kəsişməsidə F daxil olsun.

Sonlu çoxluğun alt çoxluqlar çoxluğu sonlu olduğundan, I sonlu çoxluğu üzərində olan bütün fikirlər baş fikirləridir. Hər bir I sonsuz çoxluğu üzərində baş olmayan filtrlər vardır. Onlardan ən sadəsi Freşe filtri adlanır və aşağıdakı qaydada qurulur. Fərz edək ki, n $|I|$ -ni aşmayan hər hansı sonsuz gücdür. D_n ilə I çoxluğunun tamamlayıcı çoxluğunun gücü n kiçik olan alt çoxluqları yığımını işarə edək. Aydındır ki, D_n I çoxluğu üzərində təyin olunmuş fikirdir. Oğ I və $|I| < i$ alt çoxluqlarında aydındır ki, D -yə daxildir. Bu çoxluqların $|I| < i$ kəsişməsi 0 çoxluqdur və deməli D_n daxil olan çoxluqların kəsişməsi boş çoxluqdur. Buna görə də D_n baş filtr deyil.

Məsələn, natural ədədlər çoxluğu üzərində yeganə Freşe filtri vardır (tamamlayıcısı sonlu çoxluq olan bütün alt çoxluqlar sistemi). C həqiqi ədədlər çoxluğu üzərində Freşe fikirləri:

a) tamamlayıcı çoxluqları sonlu çoxluq olan alt çoxluqlar

b) tamamlayıcısı sonlu və ya hesabi olan alt çoxluqlar sistemi

Freşe fikiri olmayan fikirə misal olaraq, natural ədədlər çoxluğu ancaq sonlu sayda cüt ədəd saxlayan alt çoxluqlar sinfini göstərmək olar.

Əgər I çoxluğu verilmişsə, I çoxluğa üzərində hər bir filtr i) ii) və iii) şərtlərini ödəyən 2^I -nin alt çoxluğudur. I üzərində təyin olunmuş filtrlər ailəsi, daxil olma münasibətinə görə qismən nizamlanmış çoxluqdur.

Teorem 4. üzərində verilmiş ixtiyari filtrlər ailəsinin boş olmayan kəsişməsidə I üzərində fikirdir. I üzərində daxil olma münasibətinə görə zəncir əmələ gətirən filtrlər ailəsinin birləşməsidə I üzərində filtirdir. Teorem 1 fikirlərinin sadə xassəsini ifadə edir və isbatı aydındır.

Teorem 5. çoxluğunun müəyyən Z alt çoxluqlar yığımının I üzərində müəyyən filtrə daxil olması üçün zəruri və kafi şərt E daxil olan istənilən sonlu sayda alt çoxluqlarının kəsişməsinin boş çoxluq olmamasıdır.

Tərif 3. üzərində heç bir filtrə alt filtr kimi daxil olmayan filtr I üzərində ultrafiltr adlanır.

Aydındır ki, I üzərində ultrafiltr olan baş filtrlər qeyd olunmuş oe/I elementləri özündə saxlayan alt çoxluqlar çoxluğudur. Baş olmayan ultrafiltrlərin varlığı aşağıdakı teoremdən alınır.

Teorem 6: I çoxluğunun müəyyən Z alt çoxluqları yığımı I çoxluğu üzərində verilmiş ultrafiltrin alt çoxluğu olması üçün zəruri və kafi şərt Z olan istənilən sonlu sayda çoxluqların kəsişməsinin boş çoxluq olmamasıdır

Əgər verilmiş filtr daxil olan bütün alt çoxluqların kəsişməsi boş çoxluqdursa (məsələn Freşe filtri) onda D özündə saxlayan hər bir ultrafiltrdə baş olmayan ultrafiltr olacaq, beləliklə hər bir sonsuz çoxluqda baş olmayan filtrlər var. Ultrafiltrin varlığı haqqında teoremin isbatı Sorun lemmasına əsaslanır (yəni seçmə aksiomuna) Sorun lemmasının köməyi olmadan hətta natural ədədlər çoxluğu üzərində baş olmayan ultrafiltrlər qurulmamışdır. Hər bir filtrin ultrafiltrə qədər genişləndirilə bilməsi hökmünün seçmə aksiomu ilə ekvivalent olduğunu asanlıqla göstərmək olar. Filtrin maksimal filtr olması haqqında əlaməti aşağıdakı teorem verir.

Teorem 7: I çoxluğu üzərində D filtr onda və ancaq onda ultrafiltr olur ki, ixtiyari $A \subset I$ çoxhədlisinin özü və ya tamamlayıcısı D daxil olsun.

Tərif 4. Q signaturalı R ümumi cəbrlər sinfi və bu signaturalı 2^I ümumi cəbri verilmişdir. 2^I ümumi cəbrinin R ümumi cəbrlər sinfin daxil olan 2^I ümumi cəbrinə a epimorfizmi o vaxt R -morfizm

adlanır o vaxt ki, $2I$ ümumi cəbrinin ixtiyari R -ə daxil olan B ümumi cəbrinə olan y epimorfizmi üçün, $2I|$ ümumi cəbrinin B ümumi cəbrinə elə a epimorfizmi olsun ki, $y=a/?$

bərabərliyi doğru olsun.

Qeyd 1.21 ümumi cəbrini hər bir R -morf obrazı, $2I$ ümumi cəbrinin R sinfində replikası adlanır və $2I_R$ -ilə işarə olunur.

Qeyd 2. Tərif 1-dən bir başa alınır ki,əgər $2I \in R$ -sə,onda $2I$ -nin $2I$ —ya eynilik inkası R morfizmdir və buna görə də hər bir R -ə daxil olan ümumi cəbr R -də özünün replikasıdır.

Tərif 5. Q signaturasının R -də replikası olan cəbrləri $Rep(R)$ ilə işarə olunur və R - in replik sistemi deyilir.

Nəticə

Tədqiqat işində aşağıdakı nəticələr alınır:

1) Q signaturah R ümumi cəbrlər sinfində ixtiyari QI ümumi cəbrinin replikası olması üçün zəruri və kafi şərt R sinfinin irsi .multiplikativ dayanıqlı və birelementli cəbrin olmasıdır.

2) İxtiyari R ümumi cəbrlər sinfi üçün $predR = S_n Re$

Bu teoremlərdən bilavasitə alınır ki,

a) Aksiomatikləşdirilə bilən R ümumi cəbrlər sinfinin replik dolu olması üçün zəruri və kafi şərt R kvaziçoxobrazlı olmasıdır

b) Əgər R cəbrlər sistemi aksiomatikləşdirilə biləndirsə ,onda $SEIR^{\wedge}$ sinfi kvaziçoxobrazlıdır.

Ədəbiyyat

1. Artamonov, V. A. (1990). Universal'nyye algebr. In *Obshchaya algebra* (T. 2). Moskva: Nauka.
2. Birkhoff, B., & Barti, T. I. (1976). *Sovremennaya prikladnaya algebra*. Moskva: Mir.
3. Baxşəliyev, Y. R., & Əbdülkərimov, L. S. (2011). *Cəbr kursu*. Bakı: Elm və Təhsil.
4. Mərmədov, Z. O. M. (2014). *Cəbrə giriş*. Bakı: Universitet Nəşriyyatı.
5. Sadıxov, Z. Q., Cabbarzadə, V. M., & Bünyatov, A. R. (2014). *Riyazi məntiq*. Bakı: ADPU Nəşriyyatı.
6. Dzhabbarzade, D. (1980). O stroyenii mnogoobraziy, kvazi mnogoobraziy i predmnogoobraziy universal'nykh algebr. In *Spetsial'nyye voprosy algebr i topologii* (s. 45–55). Baku.
7. Grettser, G. (1982). *Obshchaya toyeriya reshetok*. Moskva: Nauka.
8. Gorbunov, V. A. (1998). *Algebraicheskiye teoriya kvazimnogoobraziy*. Novosibirsk: Izd-vo NIIMIOO.