

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA ELMLƏRİ
MATHEMATICS AND MECHANICAL SCIENCES

DOI: <https://doi.org/10.36719/2789-6919/45/224-233>

Орудж Гусейнов

Гянджинский Государственный Университет
доктор философии математических наук
<https://orcid.org/0009-0008-4144-8975>
oruc.huseynov@gdu.edu.az

Тахир Мамедов

Гянджинский Государственный Университет
доктор философии математических наук
<https://orcid.org/0009-0002-9546-3683>
tahir.mammadov@gdu.edu.az

Эльчин Джавадов

Гянджинский Государственный Университет
доктор философии технических наук
<https://orcid.org/0009-0002-8868-9617>
elcin.cavadov@gdu.edu.az

Назир Исмаилов

Гянджинский Государственный Университет
<https://orcid.org/0009-0009-9100-9302>
nazir.ismayilov@gdu.edu.az

**Фундаментальное решение многоточечных нелокальных краевых задач
для гиперболических уравнений третьего порядка и интегральное
представление решения в пространствах типа С.Л.Соболева**

Резюме

В литературе мало изучены вопросы корректной разрешимости и построения фундаментальных решений локальных и нелокальных задач для линейных гиперболических уравнений с разрывными коэффициентами или коэффициентами из L_p . Поэтому имеет важное теоретическое значение исследование этих вопросов совместно с вопросом о нахождение изоморфизмов, связанных с локальными и нелокальным и начально-краевыми задачами для таких уравнений.

В работе рассматривается многоточечная нелокальная задача, связанная с отысканием решения $u \in W_p^{(2,1)}(G)$ гиперболического уравнения третьего порядка с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющего многоточечным краевым условиям. Эти многоточечные нелокальные условия, обобщают все ранее известные классы таких условий (рассмотренные в случае гладких и непрерывных коэффициентов). При помощи одного варианта метода возмущения найдены достаточные условия, при которых оператор задачи порождает изоморфизм вместе со своим сопряженным оператором между парами пространств типа С.Л.Соболева $W_p^{(2,1)}(G)$. При этих же условиях путем построения специальных сопряжённых систем типа «интегро алгебраических» уравнений введено также понятия - θ фундаментального решения рассматриваемой задачи и получено интегральное представление решения неоднородной задачи.

Ключевые слова: пространства типа С.Л.Соболева, обобщенные производные в смысле С.Л.Соболева, уравнения гиперболического типа третьего порядка, нелокальная задача, связанная система, фундаментальное решение, интегральное представление решения

Oruc Hüseynov

Gəncə Dövlət Universiteti
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru
<https://orcid.org/0009-0008-4144-8975>
oruc.huseynov@gdu.edu.az

Tahir Məmmədov

Gəncə Dövlət Universiteti
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru
<https://orcid.org/0009-0002-9546-3683>
tahir.mammadov@gdu.edu.az

Elçin Cavadov

Gəncə Dövlət Universiteti
texnika üzrə fəlsəfə doktoru
<https://orcid.org/0009-0002-8868-9617>
elcin.cavadov@gdu.edu.az

Nazir İsmayilov

Gəncə Dövlət Universiteti
<https://orcid.org/0009-0009-9100-9302>
nazir.ismayilov@gdu.edu.az

S.L.Sobolev tipli fəzalarda üçüncü tərtib hiperbolik tip tənliklər üçün çox nöqtəli qeyri-lokal sərhəd məsələsinin fundamental həlli və qeyri-bircins məsələnin həllinin S.L.Sobolev tipli $W_p^{(2,1)}(G)$ fəzasında integral göstərilişi

Xülasə

Kəsilən əmsallı və ya əmsalları $L_p(G)$ -dən olan xətti hiperbolik tip tənliklər üçün lokal və qeyri-lokal məsələlərin korrekt həll olması və onun fundamental həllinin qurulması çox az öyrənilmişdir. Ona görə də belə tənliklər üçün lokal və qeyri-lokal başlanğıc-sərhəd məsələlərinin eyni zamanda izomorfizmin tapılması məsələsi ilə əlaqəli şəkildə öyrənilməsi mühüm nəzəri əhəmiyyətə malikdir.

İşdə üçüncü tərtib hiperbolik tip tənliyin çox nöqtəli qeyri-lokal sərhəd şərtlərini ödəyən $u \in W_p^{(2,1)}(G)$ həllinin axtarılması məsələsi nəzərdən keçirilir. Bu çoxnöqtəli qeyri-lokal sərhəd şərtlərini bu vaxta qədər nəzərdən keçirilmiş bu tip məsələlərin hamısını hamar və kəsilməz əmsallar olan hal üçün ümumiləşdirir. Həyəcanlanma metodunun bir variantının köməyiylə, baxılan və onun qoşması olan məsələnin operatorlarının bir çüt S.L.Sobolev tipli $u \in W_p^{(2,1)}(G)$ fəzalar arasında izomorfizm doğurması üçün zəruri şərtlər tapılmışdır. Bu şərtlər daxilində həm də baxılan məsələ üçün xüsusi “integral – cəbri” tənliklər sistemi şəklində olan qoşma tənliklər sisteminin köməyi ilə fundamental həllin ümumiləşməsi tapılmış və bircins olmayan məsələnin həllinin integral göstərilişi tapılmışdır.

Açar sözlər: S.L.Sobolev tipli fəzalar, $W^{(2,1)}(G)$, S.L.Sobolev mənada ümumiləşmiş törəmələr, üçüncü tərtib hiperbolik tip tənliklər, qeyri-lokal məsələ, qoşma sistem, fundamental həll, həllin integral göstərilişi

Oruj Huseynov

Ganja State University
PhD in Mathematics
<https://orcid.org/0009-0008-4144-8975>
oruc.huseynov@gdu.edu.az

Tahir Mammadov

Ganja State University

PhD in Mathematics

<https://orcid.org/0009-0002-9546-3683>

tahir.mammadov@gdu.edu.az

Elchin Javadov

Ganja State University

PhD in Engineering

<https://orcid.org/0009-0002-8868-9617>

elcin.cavadov@gdu.edu.az

Nazir İsmayilov

Ganja State University

<https://orcid.org/0009-0009-9100-9302>

nazir.ismayilov@gdu.edu.az

Fundamental Solution of Multipoint Nonlocal Boundary Value Problems for Third-Order Hyperbolic Equations and Integral Representation of the Solution in S.L.Sobolev Type Spaces

Abstract

In the literature, the issues of correct solvability and construction of fundamental solutions of local and nonlocal problems for linear hyperbolic equations with discontinuous coefficients or coefficients from L_p have been little studied. Therefore, it is of theoretical importance to study these issues together with the question of finding Isomorphisms associated with local and nonlocal problems for such equations.

In this paper, we consider a multipoint nonlocal problem associated with finding the solution to a third-order hyperbolic equation with a dominant mixed derivative that satisfies multipoint boundary conditions. These multipoint nonlocal conditions generalize all previously known classes of such conditions in the case of smooth and continuous coefficients. Using one version of the perturbation method, we find sufficient conditions under which the operator of the problem generates an isomorphism together with its adjoint operator between the pores of S.L. Sobolev-type spaces. Under these same conditions, by constructing special conjugate systems of the type of “integro-algebraic” equations, the concept of a fundamental solution to the problem under consideration was also introduced and an integral representation of the solution to the inhomogeneous problem was obtained.

Keywords: Spaces of S.L.Sobolev type, generalized derivatives in the sense of S.L.Sobolev, third-order hyperbolic equations, nonlocal problem, coupled system, fundamental solution, integral representation of the solution

Введение

В работе рассматривается многоточечная нелокальная задача, связанная с отысканием решения $u \in W_p^{(2,1)}(G)$ гиперболического уравнения третьего порядка с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющего многоточечным краевым условиям.

Исследование

В работе рассмотрена многоточечная нелокальная задача, связанная с отысканием решения $u \in W_p^{(2,1)}(G)$ уравнения

$$\begin{aligned}(Lu)(x) &\equiv D_1^2 D_2 u(x) + a_{2,0}(x) D_1^2 u(x) + \\ &+ a_{1,1}(x) D_1 D_2 u(x) + a_{1,0}(x) D_1 u(x) + a_{0,1}(x) D_2 u(x) + \\ &+ a_{0,0}(x) u(x) = \varphi(x), \quad x \in G = G_1 \times G_2\end{aligned}\quad (1)$$

удовлетворяющего многоточечным краевым условиям нового вида

$$\begin{aligned}(L_{2,0}u)(x_1) &\equiv \sum_{j=1}^n [\alpha_j^{(0)}(x_1) u(x_1, x_2^j) + \beta_j^{(0)}(x_1) D_1 u(x_1, x_2^j) + \gamma_j^{(0)}(x_1) D_1^2 u(x_1, x_2^j)] \\ (L_{1,1}u)(x_2) &\equiv \sum_{j=1}^n [\alpha_j^{(1)}(x_2) u(x_1^j, x_2) + \beta_j^{(0)}(x_2) D_2 u(x_1^j, x_2) + \gamma_j^{(1)}(x_2) D_1 D_2 u(x_1^j, x_2)] \\ (L_{0,1}u)(x_2) &\equiv \sum_{j=1}^n [\alpha_j^{(2)}(x_2) u(x_1^j, x_2) + \beta_j^{(2)}(x_2) D_2 u(x_1^j, x_2) + \gamma_j^{(2)}(x_2) D_1 D_2 u(x_1^j, x_2)] \\ L_{1,0}u &\equiv \sum_{i,j=1}^n [\Delta_{i,j}^{(1)} u(x_1^i, x_2^j) + \delta_{i,j}^{(1)} D_1 u(x_1^i, x_2^j)] \\ L_{0,0}u &\equiv \sum_{i,j=1}^n [\Delta_{i,j}^{(0)} u(x_1^i, x_2^j) + \delta_{i,j}^{(0)} D_1 u(x_1^i, x_2^j)]\end{aligned}\quad (2)$$

для которых оператор задачи (1), (2) может осуществлять изоморфизм между парами пространств типа $W_p^{(2,1)}(G)$

Подобные многоточечные задачи в литературе рассмотрены только в частных случаях и для них в основном изучены вопросы существования и единственности регулярных решений в случае гладких коэффициентов (Карданов, 1986).

В работе задачи (1), (2) изучена при более слабых условиях на коэффициенты типа суммируемости и ограниченности, обеспечивающих ограниченность операторов $\hat{L}: W_p^{(2,1)}(G) \rightarrow H_p$ здесь

$$\begin{aligned}\hat{L} &= (L, L_{2,0}, L_{1,1}, L_{0,1}, L_{1,0}, L_{0,0})u \\ H_p &= L_p(G) \times L_p(G_1) \times L_p(G_2) \times L_p(G_2) \times R \times R \text{ и}\end{aligned}$$

$a_{i,0} \in L_p(G), i=0,1$ и существуют функции $a_{i,1}^0 \in L_p(G_1) \in L_p(G_1), i=0,1; a_{2,0}^0 \in L_p(G_2)$, такие, что

$$|a_{i,1}(x)| \leq a_{i,1}^0(x_1), \quad |a_{2,0}(x)| \leq a_{2,0}^0, \quad x \in G.$$

Эту задачу мы изучаем как возмущение задачи Гурса

$$\left\{ \begin{aligned}(L^0 u)(x) &\equiv D_1^2 D_2 u(x) + a_{2,0}(x) D_1^2 u(x) + a_{1,1}(x) D_1 D_2 u(x) + \\ &+ a_{1,0}(x) D_1 u(x) + a_{0,1}(x) D_2 u(x) + a_{0,0}(x) u(x) = \varphi(x), \quad x \in G; \\ (L_{2,0}^0 u)(x_1) &\equiv D_1^2 u(x_1, 0) = \varphi_{2,0}(x_1) \\ (L_{1,1}^0 u)(x_2) &\equiv D_1 D_2 u(0, x_2) = \varphi_{1,1}(x_2) \\ (L_{0,1}^0 u)(x_2) &\equiv D_2 u(0, x_2) = \varphi_{0,1}(x_2) \\ L_{1,0} u &\equiv D_1 u(0, 0) = \varphi_{1,0} \\ L_{0,0} u &\equiv u(0, 0) = \varphi_{0,0}\end{aligned}\right.\quad (4)$$

Задача (3), (4) является частным случаем задачи (1), (2) при

$$\alpha_j^{(0)} = \beta_j^{(0)} = \gamma_j^{(0)} = \alpha_j^{(1)} = \beta_j^{(1)} = \gamma_j^{(1)} = \alpha_j^{(2)} = \beta_j^{(2)} = \gamma_j^{(2)} = \\ = \Delta_{i,j}^{(1)} = \delta_{i,j}^{(1)} = \Delta_{i,j}^{(0)} = \delta_{i,j}^{(0)} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

В работе (Гусейнов, 1983) доказано, что оператор $\hat{L}^0 = (L^0, L_{2,0}^0, L_{1,1}^0, L_{0,1}^0, L_{1,0}^0, L_{0,0}^0)$ этой задачи имеет ограниченный обратный $(\hat{L}^0)^{-1}$ определённый на H_p .

Рассмотрим ограниченные операторы

$$\begin{aligned} (N_{2,0}u)(x_1) &\equiv \sum_{j=1}^n [\alpha_j^{(0)}(x_1)u(x_1, x_2^j) + \beta_j^{(0)}(x_1)D_1u(x_1, x_2^j) + \gamma_j^{(0)}(x_1)D_1^2u(x_1, x_2^j)] \\ (N_{1,1}^0u)(x_2) &\equiv \sum_{j=1}^n [\alpha_j^{(1)}(x_2)u(x_1^j, x_2) + \beta_j^{(1)}(x_2)D_2u(x_1^j, x_2) + \gamma_j^{(1)}(x_2)D_1D_2u(x_1^j, x_2)] \\ (N_{0,1}u)(x_2) &\equiv \sum_{j=1}^n [\alpha_j^{(2)}(x_2)u(x_1^j, x_2) + \beta_j^{(2)}(x_2)D_2u(x_1^j, x_2) + \gamma_j^{(2)}(x_2)D_1D_2u(x_1^j, x_2)] \quad (5) \\ N_{1,0}u &\equiv \sum_{i,j=1}^n [\Delta_{i,j}^{(1)}u(x_1^j, x_2^j) + \delta_{i,j}^{(1)}D_1u(x_1^j, x_2^j)] \\ N_{0,0}u &\equiv \sum_{i,j=1}^n [\Delta_{i,j}^{(0)}u(x_1^j, x_2^j) + \delta_{i,j}^{(0)}D_1u(x_1^j, x_2^j)] \end{aligned}$$

действующие из $W_p^{(2,1)}(G)$ в $L_p(G_1), L_p(G_2), L_p(G_2)RuR$, соответственно (Гусейнов, 1985).

Тогда оператор $\hat{N} = (0, N_{2,0}, N_{1,1}, N_{0,1}, N_{1,0}, N_{0,0})$ ограничен из $W_p^{(2,1)}(G)$ в H_p . (Guseynov, 2019).

При помощи оператора $\hat{N}$ задачи (1), (2) можно задавать в виде операторного уравнения (Guseynov, 2015)

$$\hat{L}^0u + \hat{N}u = \hat{\varphi} \quad (6)$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть

$$\begin{aligned} V = \max &\left[\sum_{j=1}^n \left(\|\alpha_j^{(0)}\|_{p,G_1} + \|\beta_j^{(0)}\|_{p,G_1} + \|\gamma_j^{(0)}\|_{\infty,G_1} \right), \right. \\ &\sum_{j=1}^n \left(\|\alpha_j^{(1)}\|_{p,G_2} + \|\beta_j^{(1)}\|_{\infty,G_2} + \|\gamma_j^{(1)}\|_{\infty,G_2} \right), \\ &\sum_{j=1}^n \left(\|\alpha_j^{(2)}\|_{p,G_2} + \|\beta_j^{(2)}\|_{\infty,G_2} + \|\gamma_j^{(2)}\|_{\infty,G_2} \right), \\ &\left. \sum_{ij=1}^n \left(|\Delta_{i,j}^{(1)}| + |\delta_{i,j}^{(1)}| \right) \sum_{i,j=1}^n \left(|\Delta_{i,j}^{(0)}| + |\delta_{i,j}^{(0)}| \right) \right] \end{aligned}$$

достаточно малое число. (Akhiev, 2020). Тогда задача (1), (2) везде корректно разрешима, т.е. существует ограниченный обратный $(\hat{L}^0 + \hat{N})^{-1}$.

Очевидно, что $(\hat{L}^0 + \hat{N})^* = (\hat{L}^0)^* + (\hat{N})^*$. Оператор $(\hat{L}^0)^*$ совпадает с сопряженным оператором задачи Гурса (Guseynov, 2023). Отсюда следует, что для нахождения явного вида оператора $(\hat{L}^0 + \hat{N})$ достаточно найти явный вид оператора $(\hat{N})^*$ (Дезин А, 1967). Если $\hat{f} = (f, f_{2,0}, f_{1,1}, f_{0,1}, f_{1,0}, f_{0,0}) \in H_q$ ограниченный функционал на H_p , то очевидно, что

$$\begin{aligned}\hat{f}(\hat{N}u) = & \int_{G_1} \sum_{j=1}^n [\alpha_j^{(0)}(x_1)u(x_1, x_2^j) + \beta_j^{(0)}(x_1)D_1u(x_1, x_2^j) + \gamma_j^{(0)}(x_1)D_1^2u(x_1, x_2^j)]f_{2,0}(\xi_1)d\xi_1 + \\ & + \int_{G_2} \sum_{j=1}^n [\alpha_j^{(1)}(x_2)u(x_1^j, x_2) + \beta_j^{(0)}(x_2)D_2u(x_1^j, x_2) + \gamma_j^{(1)}(x_2)D_1D_2u(x_1^j, x_2)]f_{1,1}(\xi_2)d\xi_2 + \\ & + \int_{G_2} \sum_{j=1}^n [\alpha_j^{(2)}(x_2)u(x_1^j, x_2) + \beta_j^{(2)}(x_2)D_2u(x_1^j, x_2) + \gamma_j^{(2)}(x_2)D_1D_2u(x_1^j, x_2)]f_{0,1}(\xi_2)d\xi_2 + \\ & + \sum_{i,j=1}^n [\Delta_{i,j}^{(1)}u(x_1^j, x_2^j) + \delta_{i,j}^1D_1u(x_1^j, x_2^j)]f_{1,0} + \\ & + \sum_{i,j=1}^n [\Delta_{i,j}^{(0)}u(x_1^j, x_2^j) + \delta_{i,j}^{(0)}D_1u(x_1^j, x_2^j)]f_{0,0}.\end{aligned}$$

Используя интегральное представление функции $u \in W_p^{(1,1)}(G)$ [7] это выражение можно привести к виду

$$\begin{aligned}\hat{f}(\hat{N}u) = & \iint_G (B\hat{f})(\xi)D_1^2D_2u(\xi)d\xi + \\ & + \int_{G_1} (B_{2,0}\hat{f})(\xi_1)D_1^2u(\xi_{1,0})d\xi_1 + \int_{G_2} (B_{1,1}\hat{f})(\xi_2)D_1D_2u(0, \xi_2)d\xi_2 + \\ & + \int_{G_1} (B_{0,1}\hat{f})(\xi_2)D_2u(0, \xi_2)d\xi_2 + (B_{1,0}\hat{f})D_1u(0,0) + (B_{0,0}\hat{f})u(0,0)\end{aligned}$$

Отсюда видно, что $(\hat{N})^*$ действует в H_q , ограничен и имеет вид $(\hat{N})^* = (B, B_{2,0}, B_{1,1}, B_{0,1}, B_{1,0}, B_{0,0})$, Или:

$$\begin{aligned}(B\hat{f})(\xi) = & \int_{\xi_1}^{h_1} \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(1)}(\tau_1)(\tau_1 - \xi_1)\theta(x_2^j - \xi_2)f_{2,0}(\tau_1)d\tau_1 + \\ & + \sum_{j=1}^n \theta(x_2^j - \xi_2) \int_{\xi_1}^{h_1} \beta_j^{(0)}(\tau_1)f_{2,0}(\tau_1)d\tau_1 + \sum_{j=1}^n \theta(x_2^j - \xi_2)\gamma_j^{(0)}(\xi_1)f_{2,0}(\xi_1) + \\ & + \sum_{j=1}^n \theta(x_2^j - \xi_2)(x_2^j - \xi_2) \int_{\xi_1}^{h_1} \alpha_j^{(1)}(\tau_2)f_{0,1}(\tau_2)d\tau_2 + \\ & + \sum_{j=1}^n \theta(x_1^j - \xi_1)(x_1^j - \xi_1)\beta_j^{(1)}(\xi_2)f_{1,1}(\xi_2) + \sum_{j=1}^n \theta(x_1^j - \xi_1)\gamma_j^{(1)}(\xi_2)f_{1,1}(\xi_2) + \\ & + \sum_{j=1}^n \theta(x_1^j - \xi_1)(x_1^j - \xi_1) \int_{\xi_2}^{h_2} \alpha_j^{(2)}(\tau_2)f_{0,1}(\tau_2)d\tau_2 + \\ & + \sum_{j=1}^n \theta(x_1^j - \xi_1)(x_1^j - \xi_1)\beta_j^{(1)}(\xi_2)f_{0,1}(\xi_2) + \sum_{j=1}^n \theta(x_1^j - \xi_1)\gamma_j^{(1)}(\xi_2)f_{1,1}(\xi_2) + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \Delta_{i,j}^{(1)}\theta(x_1^i - \xi_1)\theta(x_2^j - \xi_2)(x_2^j - \xi_2)f_{1,0} + \sum_{i,j=1}^n \theta(x_1^i - \xi_1)\theta(x_2^j - \xi_2)\delta_{i,j}^{(1)}f_{1,0} + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \Delta_{i,j}^{(0)}\theta(x_1^i - \xi_1)\theta(x_2^j - \xi_2)(x_1^j - \xi_1)f_{0,0} + \sum_{i,j=1}^n \delta_{i,j}^{(1)}\theta(x_1^i - \xi_1)\theta(x_2^j - \xi_2)f_{0,0}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B_{2,0} \hat{f})(\xi_1) &= \sum_{j=1}^n \int_{\xi_1}^{h_1} (\tau_1 - \xi_1) \alpha_j^{(0)}(\tau_1) f_{2,0}(\tau_1) d\tau_1 + \\ &+ \int_{\xi_1}^{h_1} \sum_{j=1}^n \beta_j^{(0)}(\tau_1) f_{2,0}(\tau_1) d\tau_1 + \sum_{l=1}^n \gamma_j^{(0)}(\tau_1) f_{2,0}(\tau_1) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \theta(x_1^j - \xi_1) (x_1^j - \xi_1) \int_{\xi_2}^{h_2} (\tau_2) f_{1,1}(\tau_2) d\tau_2 + \\ &+ \sum_{i=1}^n \theta(x_1^j - \xi_1) (x_1^j - \xi_1) \int_{\xi_2}^{h_2} \alpha_j^{(2)}(\tau_2) f_{0,1}(\tau_2) d\tau_2 + \\ &+ \sum \Delta_{0,1}^{(1)} (x_1^j - \xi_1) \theta(x_1^i - \xi_1) f_{1,0} + \sum \delta_{i,j}^{(1)} \theta(x_1^i - \xi_1) f_{0,0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B_{1,1} \hat{f})(\xi_2) &= \sum_{j=1}^n \theta(x_2^j - \xi_2) \int_{G_1} \xi_1 \alpha_j^{(1)}(\xi_1) f_{2,0}(\xi_1) d\tau_1 + \\ &+ \sum_{G_1} \int \beta_j^{(0)}(\xi_1) f_{2,0}(\xi_1) \theta(x_2^j - \xi_2) + \sum_{j=1}^n \beta_j^{(1)}(\xi_2) x_1^j f_{1,1}(\xi_2) + \\ &+ \sum_{l=1}^n \gamma_j^{(1)}(\xi_2) f_{1,1}(\xi_2) + \sum_{j=1}^n x_1^j \int_{\xi_2}^{h_2} \alpha_j^{(2)}(\tau_2) f_{0,1}(\tau_2) d\tau_2 + \\ &+ \left[\sum_{j=1}^n \beta_j^{(2)}(\xi_2) x_1^j f_{0,1} + \sum_{l=1}^n \gamma_j^{(2)}(\xi_2) \right] f_{0,1}(\xi_1) + \\ &+ \left[\sum_{j=1}^n \theta(x_2^j - \xi_2) x_1^i \Delta_{i,j}^{(1)} + \sum \delta_{i,j}^{(1)} \theta(x_2^i - \xi_2) \right] f_{1,0} + \\ &+ \left[\sum x_1^i \theta(x_2^i - \xi_2) \Delta_{i,j}^0 + \sum_{i,j>1} \delta_{i,j}^{(0)} \theta(x_2^j - \xi_2) \right] f_{0,0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B_{0,1} \hat{f})(\xi_2) &= \sum_{j=1}^n \int_{G_1} \alpha_j^{(1)}(\xi_1) \theta(x_2^j - \xi_2) f_{2,0}(\xi_1) d\tau_1 + \\ &+ \sum_{j=1}^n \int_{\xi_2}^{h_2} \alpha_j^{(2)}(\tau_2) f_{1,1}(\tau_2) d\tau_2 + \sum_{j=1}^n \beta_j^{(1)}(\xi_2) f_{1,1}(\xi_2) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \int_{\xi_2}^{h_2} \alpha_j^{(2)}(\tau_2) f_{0,1}(\tau_2) d\tau_2 + \sum_{j=1}^n \beta_j^{(2)}(\xi_2) f_{0,1}(\xi_2) + \\ &+ \sum \Delta_{i,j}^{(1)} \theta(x_2^j - \xi_2) f_{1,0} + \sum \Delta_{i,j}^{(0)} \theta(x_2^j - \xi_2) f_{0,0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{1,0} \hat{f} &= \sum_{j=1}^n \int_{G_1} [\xi_1 \alpha_j^{(0)}(\xi_1) + \beta_j^{(0)}(\xi_1)] f_{2,0}(\xi_1) d\xi_1 + \\ &+ \sum_{j=1}^n x_1^j \int_{G_2} \alpha_j^{(1)}(\xi_2) f_{1,1}(\xi_2) d\xi_2 + \sum_{j=1}^n x_1^j \int_{G_2} \alpha_j^{(2)}(\xi_2) f_{1,1}(\xi_2) d\xi_2 + \\ &+ \sum_{i,j=1}^n [x_1^i \Delta_{i,j}^{(1)} + \delta_{i,j}^{(1)}] f_{1,0} + \sum_{i,j=1}^n [x_1^i \Delta_{i,j}^{(0)} + \delta_{i,j}^{(0)}] f_{0,0} \end{aligned}$$

$$B_{0,0} \hat{f} = \sum_{j=1}^n \int_{G_2} \alpha_j^{(1)}(\xi_1) f_{2,0}(\xi_1) d\xi_1 + \\ + \sum_{j=1}^n \int_{G_2} \alpha_j^{(1)}(\xi_2) f_{1,1}(\xi_2) d\xi_2 + \sum_{j=1}^n \int_{G_2} \alpha_j^{(0)}(\xi_2) f_{0,1}(\xi_2) d\xi_2 + \\ + \sum_{i,j=1}^n \Delta_{i,j}^{(1)} f_{1,0} + \sum_{i,j=1}^n \Delta_{i,j}^{(0)} f_{0,0}$$

Тогда сопряженное уравнение задачи (1), (2) имеет вид

$$\begin{cases} (V\hat{f})(\xi) = \psi(\xi), \xi \in G; & (V_{2,0}\hat{f})(\xi_1) = \psi_{2,0}(\xi_1), \xi_1 \in G_1; \\ (V_{1,1}\hat{f})(\xi_2) = \psi_{1,1}(\xi_2), \xi_2 \in G_2; & (V_{0,1}\hat{f})(\xi_2) = \psi_{0,1}(\xi_2), \xi_2 \in G_2; \\ V_{1,0}\hat{f} = \psi_{1,0}, & V_{0,0}\hat{f} = \psi_{0,0} \end{cases}$$

где $(\hat{L})^* = (V, V_{2,0}, V_{1,1}, V_{0,1}, V_{1,0}, V_{0,0}): H_q \rightarrow H_q$

сопряженный оператор для оператора $(\hat{L}^0 + \hat{N})^*$. (Colton, 1972).

θ - фундаментальным решением задачи (1), (2) назовем функцию

$$f(x) = (f(\cdot, \cdot, x), f_{2,0}(\cdot, x), f_{1,1}(\cdot, x), f_{0,1}(\cdot, x), f_{1,0}(x), f_{0,0}(x)) \in H_q$$

которая для каждой фиксированной точки $x \in G$ является решением системы уравнений

$$\begin{aligned} (V\hat{f})(\xi) &= (x_1 - \xi_1)\theta(x_1 - \xi_1)\theta(x_2 - \xi_2), \xi \in G; \\ (V_{2,0}\hat{f})(\xi_1) &= (x_1 - \xi_1)\theta(x_1 - \xi_1), \xi_1 \in G_1; \\ (V_{1,1}\hat{f})(\xi_2) &= x_1\theta(x_2 - \xi_2), \\ (V_{0,1}\hat{f})(\xi_2) &= \theta(x_2 - \xi_2), \xi_2 \in G_2; \\ V_{0,0}\hat{f} &= x_1 \\ V_{0,0}\hat{f} &= 1 \end{aligned}$$

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для достаточно малых чисел

$$\nu = \max \left[\sum_{j=1}^n \left(\|\alpha_j^{(0)}\|_{p,G_1} + \|\beta_j^{(0)}\|_{p,G_1} + \|\gamma_j^{(0)}\|_{\infty,G_1} \right), \right. \\ \sum_{j=1}^n \left(\|\alpha_j^{(1)}\|_{p,G_2} + \|\beta_j^{(1)}\|_{\infty,G_2} + \|\gamma_j^{(1)}\|_{\infty,G_2} \right), \\ \sum_{j=1}^n \left(\|\alpha_j^{(2)}\|_{p,G_2} + \|\beta_j^{(2)}\|_{\infty,G_2} + \|\gamma_j^{(2)}\|_{\infty,G_2} \right), \\ \left. \sum_{ij=1}^n \left(|\Delta_{i,j}^{(1)}| + |\delta_{i,j}^{(1)}| \right) \sum_{i,j=1}^n \left(|\Delta_{i,j}^{(0)}| + |\delta_{i,j}^{(0)}| \right) \right]$$

задачи (1), (2) имеет единственное θ фундаментальное решение (Guseynov, 2022).
 $\hat{f}(x) = (f(\cdot, \cdot, x), f_{2,0}(\cdot, x), f_{1,1}(\cdot, x), f_{0,1}(\cdot, x), f_{1,0}(x), f_{0,0}(x)) \in H_q$. При этом решение $u \in W_p^{(2,1)}(G)$
задачи (1), (2) представляется в виде

$$\begin{aligned} u(x) = & \iint_G f(\xi, x) \varphi(\xi) d\xi + \int_{G_1} f_{2,0}(\xi_1, x) \varphi_{2,0}(\xi_1) d\xi_1 + \\ & + \int_{G_2} f_{1,1}(\xi_2, x) \varphi_{1,1}(\xi_2) d\xi_2 + \int_{G_2} f_{0,1}(\xi_2, x) \varphi_{0,1}(\xi_2) d\xi_2 + \\ & + f_{1,0}(x) \varphi_{1,0} + f_{0,0}(x) \varphi_{0,0} \end{aligned}$$

Некоторые классы таких задач ранее рассматривались в работах (Карданов, 1986)

Заключение

В работе рассматривается одна многоточечная нелокальная задача для гиперболического уравнения третьего порядка в пространствах типа С. Л. Собелева. При этом от коэффициентов уравнения требуется очень слабые условия, типа ограниченности и суммируемости коэффициентов. Найдены достаточные условия при которых оператор задачи порождает изоморфизм между парами С.Л.Собелевских пространств и интегральное представление неоднородной задачи, при помощи фундаментальных решений.

Литература

1. Akhiev, S.S., Akhmedov, F.Sh. (2020). On a boundary value problem for a third-order equation with a non-local condition A.M.Nakhushiev. *Development Equation, Science and Business: Result: abstract of the International Scientific and Practical Internet Conference*. December 3-4 2020. Ukraine, Dnepr.
2. Akhiev, S.S. (2010). A priori estimate for discontinuous solutions of a second order linear hyperbolic problem. *Elektronic Journal of Qualitative Theory Differ. Equ.* № 23, <http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/>
3. Colton, D.T. (1972). Pseudo parabolic equations in one space variable. *Diff. equat*, vol12, №3, p. 559-565.
4. Coleman, B.D. (1965). Instability, uniqueness and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip. Duffin R.J and Mirel V.Y. *Arch.Rat.Mach.Anal*, 19.100-116.
5. Дезин, А.А. (1967). Операторы с первой производной по «в числении» и нелокальные граничные условия. *Изв. АН СССР, сер, мат-кам.*, т. 31, №1, с 61-86.
6. Карданов, Р.Г. (1986). Задача Гурса для нагруженного гиперболического уравнения третьего порядка. *Межвуз.сбор. Науч. Трудов. «Нелокальные задачи для урав. в част. Произв. и их приложения к модел. и авт. проект. слож. систем»*. Каб-Бал. ГУ, Нальчик, 1986, с.140.
7. Гусейнов, О.М. (1985). О существовании и единственности решений некоторых краевых задач для гиперболического уравнения третьего порядка. *Изв.АН Азерб.ССР, сер.физ-тех.и мат.наук*, №4 с.120-124
8. Гусейнов, О.М. (2019). О задачах типа Коши и Гурса на линиях с характеристическими кусками для гиперболических уравнений второго порядка. *International conference, Khazar University, Baku, Azerbaijan*, с. 158-160.
9. Guseynov, O.M., Ismayilov, N.A., Mamedov, R.M., Kubishev, I.N., Gasimova, A.R. (2015). On optimality equation for the linear hyperbolic equation of second order with numerous non-local boundary. *THERMAN 2015 and 4nd Rostosker International symposium, Baku, Azerbaijan*, (77-78)

10. Guseynov, O.M., Mamedov, T.D. (2024). Fundamental solution of a Cauchy and Goursat type problem for Second order hyperbolic equations and related optimal control problems. Journal of Contemporary Applied Mathematics, V1. №1. July. ISSN 2222-5498
11. Guseynov, O.M., Mamedov, T.D. (2022). Fundamental solution of Cauchy and Goursat type problems in lines with characteristic and non-characteristic pieces for third order hyperbolic equations. Journal of Contemporary Applied Mathematics, V12. №2, December. ISSN 2222-5498
12. Водахова, В.А. (1983). Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нелокальным условием А.М.Нахушева. ДУ, т.19, №1. С.163-166

Поступило: 14.02.2025

Принято: 20.05.2025